

補足1 ポアソン方程式の解の一意性

ポアソン方程式の解の唯一性を示すために、まずグリーンの定理を証明する。今、任意のスカラー関数 ψ に対してベクトル関数 \mathbf{V} を次のように定義する。

$$\mathbf{V} = \psi \text{grad } \psi$$

すると、ガウスの定理（註1）から、

$$\int_S \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \text{div } \mathbf{V} dV$$

ここで、

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{V} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\psi \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\psi \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\psi \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \\ &= \psi \nabla^2 \psi + (\text{grad } \psi)^2 \end{aligned}$$

である。なお、

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

である。これから、

$$\int_S (\text{grad } \psi)_n dS = \int_V \psi \nabla^2 \psi dV + \int_V (\text{grad } \psi)^2 dV$$

を得る。これがグリーンの定理である。

いま、ポアソン方程式に境界条件を満たす解が2つあったとする。それらを ϕ_1 、 ϕ_2 とし、その差を ψ とする。即ち、

$$\psi = \phi_1 - \phi_2$$

とする。 ϕ_1 、 ϕ_2 は境界条件を満たすので、境界面 S で $\psi = 0$ となる。従って、グリーンの定理の左辺は0になる。一方、 ϕ_1 、 ϕ_2 はポアソン方程式を満たすので、

$$\nabla^2 \psi = \nabla^2 \phi_1 - \nabla^2 \phi_2 = -\frac{\rho}{\epsilon_0} + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$$

が成立する。従って、グリーンの定理の右辺第一項は0になる。その結果、右辺第二項のみが残るので、

$$(\text{grad } \psi)^2 = 0$$

となり、結局、

$$\text{grad } \psi = 0$$

を得る。従って、

$$\psi = \text{const}$$

であるが、境界面では0であったので $\psi = 0$ となり、

$$\phi_1 = \phi_2$$

である。よって、解は一意的に決まる。

(註1) ガウスの定理は次のようにして示される。ガウスの法則とその微分形はそれぞれ

$$\int_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \rho dV$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho$$

なので、これから、

$$\int_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \operatorname{div} \mathbf{D} dV$$

を得る。これは任意のベクトル \mathbf{D} について成り立ち、体積積分と表面積分の関係を与えるものである。