

宿題と解答 (12月19日分)

(問題)

図1のように一直線上に置かれた磁気双極子どうしに働く力を求めよ。ただし、 $r \gg l$ とする。

(解答)

2つの磁気双極子の磁極間(N,N), (S,S), (N,S), (S,N)に働く力はそれぞれ以下のようになる。

$$(N,N) \text{ 斥力} \quad F_1 = \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{q_M^2}{r^2}$$

$$(S,S) \text{ 斥力} \quad F_2 = \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{q_M^2}{r^2}$$

$$(N,S) \text{ 引力} \quad F_3 = -\frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{q_M^2}{(r+l)^2}$$

$$(S,N) \text{ 引力} \quad F_4 = -\frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{q_M^2}{(r-l)^2}$$

F_1 と F_3 の和をとり、 (l/r) で展開して $(l/r)^2$ のオーダーまでとると、

$$F_1 + F_3 = \frac{q_M^2}{4\pi\mu_0 r^2} \left[1 - \left(1 + \frac{l}{r} \right)^{-2} \right] = \frac{q_M^2}{4\pi\mu_0 r^2} \left[\frac{2l}{r} - 3 \left(\frac{l}{r} \right)^2 \right]$$

となる。ここで、

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots$$

を用いた。同様に、

$$F_2 + F_4 = \frac{q_M^2}{4\pi\mu_0 r^2} \left[1 - \left(1 - \frac{l}{r} \right)^{-2} \right] = \frac{q_M^2}{4\pi\mu_0 r^2} \left[-\frac{2l}{r} - 3 \left(\frac{l}{r} \right)^2 \right]$$

となるので、力の合計は次のように求められる。

$$F = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = -\frac{3q_M^2 l^2}{2\pi\mu_0 r^4} = -\frac{3m^2}{2\pi\mu_0 r^4}$$

力は r^{-4} に比例することに注意。

なお、相互作用エネルギーは、2つの磁気双極子を無限遠から r まで運ぶときのエネルギーに等しいので、

$$U = -\int_{\infty}^r \left(-\frac{3m^2}{2\pi\mu_0 r^4} \right) dr = -\frac{m_2}{2\pi\mu_0 r^3}$$

となる。

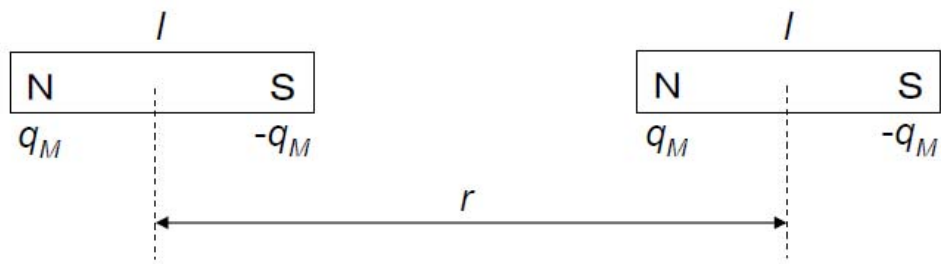


図 1