宿題とその解答（11 月 14 日分）

（問題）

接地されていない半径aの電荷をもたない導体球がある。その中心からrだけ離れたところに電荷qを置く。この系での任意の球外の点における静電ポテンシャルを求めよ。また、$r >> a$のとき、電荷と導体球に働く力を求めよ。

（解答）

授業で「接地された導体球」の場合について行ったように、ΔAPO とΔPQO が相似になるように点 Q をとり（図１）、そこに$-\frac{a}{r}q$の鏡像電荷をおけば、導体球表面での静電ポテンシャルは一定値（ゼロ）になり、境界条件を満足する。しかし、このままでは、導体球表面が全体としてみると負に帯電することになり、もともと電荷をもたなかったことを考えると電荷保存の点で矛盾を生じる。そこで、導体球の中心に仮想電荷$\frac{a}{r}q$を置く。すると、導体球表面の総電荷はゼロになる。また、導体球表面での電位は

$$\phi = \frac{\frac{a}{r}q}{4\pi\varepsilon_0 a} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

となって一定値を保つことになり、境界条件を満足する。よって３つの電荷の重ね合わせによって、任意の点 R でのポテンシャルは、

$$\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\rho} - \frac{a}{r}\frac{1}{\rho'} + \frac{a}{r}\frac{1}{\rho''}\right)$$

となる。ただし、ρ、ρ'、ρ''は RA、RQ、RO の距離を表す。

次に電荷と導体球に働く引力を求める。クーロンの法則より、

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\frac{a}{r}q^2}{\overline{\mathrm{AQ}}^2} - \frac{\frac{a}{r}q^2}{\overline{\mathrm{AO}}^2}\right)$$

である。

$$\overline{\mathrm{AQ}}^2 = \left(r - \frac{a^2}{r}\right)^2$$

$$\overline{\mathrm{AO}}^2 = r^2$$

を用いて整理すると、

$$F=\frac{aq^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^3}\left(\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)^{-2}-1\right)$$

となる。$r>>a$ のときは近似的に、

$$F\approx\frac{a^3q^2}{2\pi\varepsilon_0 r^5}$$

となり、r^{-5} に比例する。接地されていたときは r^{-3} であることを考えると、弱くなっていることがわかる。

なお、$r>>a$ のときの式は、電気双極子モーメント $\frac{a}{r}q\times\frac{a^2}{r}$ が軸方向の遠方につくる電場と、電荷 q の相互作用で生じる力と同じになっていることに注意してほしい。

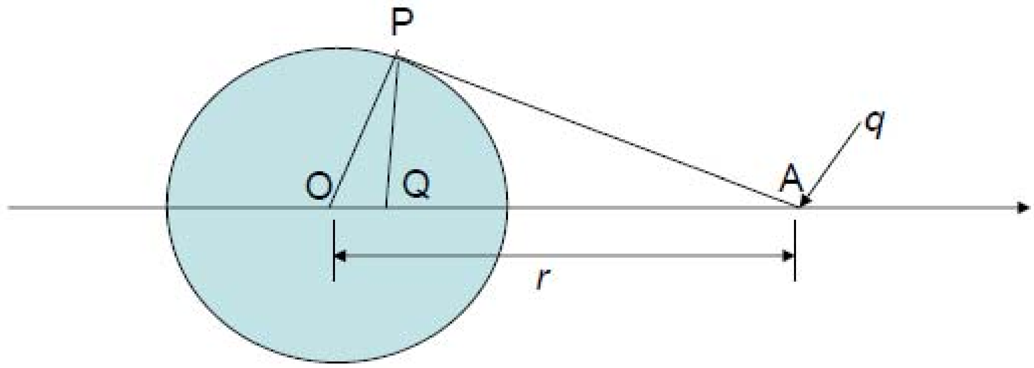

図 1