宿題とその解答（10 月 31 日分）

問題１

(x, y) 平面平面上に無限一様平面分布した電荷がある。単位面積あたりの電荷を ξ とする。Z 座標が z_0 から z に変わるとき、その２点の間の電位差を求めよ。

解答１

10 月 17 日分の宿題にあるように、この場合の電場は z によらず、

$$E_z = \frac{\xi}{2\varepsilon_0}$$

である。電位差は定義から、

$$\phi = -\int_{z_0}^{z} \frac{\xi}{2\varepsilon_0} dz = -\frac{\xi}{2\varepsilon_0}(z - z_0)$$

である。

問題２

$\mathbf{E} = -\mathrm{grad}\phi$ を用いて、電気双極子モーメントに対する ϕ の表式から $\mathbf{E}$ の表式を導け。

解答２

$$\phi = \frac{(\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\mu})}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

なので、これを (x, y, z) 座標系で書き直す。$\boldsymbol{\mu}$ は授業でやったように z 方向を向いていて、その成分しかないとすると、$\mu z = (\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{r})$ なので、

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mu z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

である。従って、

$$E_x = -\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3}{2}\right)\frac{\mu z\cdot(2x)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3\mu z}{r^5}x$$

$$E_y = -\frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3}{2}\right)\frac{\mu z\cdot(2y)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3\mu z}{r^5}y$$

$$E_z = -\frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\frac{3}{2}\mu z\cdot(2z)(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} - \mu(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}{(x^2 + y^2 + z^2)^3}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3\mu z}{r^5}z - \frac{\mu}{r^3}\right)$$

となる。また、

$$\mathbf{E} = E_x \mathbf{e}_x + E_y \mathbf{e}_y + E_z \mathbf{e}_z$$

および、

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$$

に注意して整理すると、次の式を得る。

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3(\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\mu})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\boldsymbol{\mu}}{r^3}\right)$$