

宿題とその解答 (10月24日分)

(問題)

原点に電荷 q を置く。原点以外の点で、 $\text{div} \mathbf{E} = 0$ となることを \mathbf{E} の表式を用いて確かめよ。

(解答)

(x, y, z) 点における電場は次のように書ける。 $(r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ に注意。)

$$E_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_x}{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$E_y = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_y}{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$E_z = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_z}{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

従って、

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} - 3x^2(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}{(x^2 + y^2 + z^2)^3}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial y} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} - 3y^2(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}{(x^2 + y^2 + z^2)^3}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} - 3z^2(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}{(x^2 + y^2 + z^2)^3}$$

となる。定義にあてはめて上記の3つの和をとると、

$$\text{div} \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

が確認される。