超短一般相対論入門　東京大学ビッグバン宇宙国際研究センター　横山順一

目　次 §1 原理 §2 計量テンソル §3 重力場中の自由粒子の運動方程式 §4 ニュートン極限 §5 共変微分と対応原理 §6 曲率テンソル §7 アインシュタイン方程式 §8 重力波 §9 真空中での重力波の伝播 §10 重力波の放出

註) 通常のカリキュラムだと、重力波は一コマ 90 分の講義の 11 回目になってようやく出てきます。http://www.resceu.s.u-tokyo.ac.jp/~yokoyama/G13.html を参考に演習問題も解いてみて下さい。

§1 原理

一般相対論は、等価原理と一般相対性原理に基づいて演繹的に構成された理論ですが、今になって考えるとこのようなアプローチは必要でもなければ十分でもありません。しかし、まだ場の理論に習熟していない新 4 年生にとってはこのようなアインシュタインアプローチが直截であることは事実です。

等価原理 地表付近のような鉛直下向きの一様重力場があるとき、質点の運動方程式は

$$m_I \ddot{z} = m_G g$$

とかけます。(鉛直下向きに z 軸をとる。) 左辺の m_I は、任意の力を与えたときの物体の感応度 (動きにくさ) を表す抵抗係数。右辺の m_G は、重力場中に置かれた物体がどれだけの力を感じるかを表す比例係数 · チャージ · 電荷ならぬ重力荷の大きさを表します。両者が等しい値をとる先験的な理由は何もありません。しかし、経験によると、これらは常に等しいように見えます。これを積極的にとりあげ、$m_I = m_G$ があらゆる物質に対して成り立つ、という原理を導入してみます。すると、加速度座標系に移ったときに導入される慣性力と重力は決して見分けがつかないことになります。逆に言うと、重力が働いているような状況下でも、自由落下する座標系に移ると、重力の効果を消すことができて、局所的な慣性系 (**局所慣性系**という) に座標変換することができるのです。このような内容を含む、慣性質量と重力質量の等価性のことを等価原理といいます。

つまり、重力も考察の対象に含むと慣性系と非慣性系の区別は意味がなくなるのです。

また、重力の効果は一点だけを見たのでは消去可能であり、少し離れた二点の差、すなわち潮汐力に相当する部分を見ないと、そこに重力が働いているかどうか、判断できないことになります。二点 $\boldsymbol{x}(t)$ と $\boldsymbol{x}(t) + \delta\boldsymbol{x}(t)$ にある質点の重力ポテンシャル $\phi(\boldsymbol{x})$ 中での運動方程式は、それぞれ $\ddot{x}^i = -\partial_i \phi(\boldsymbol{x})$, $\ddot{x}^i + \delta\ddot{x}^i = -\partial_i \phi(\boldsymbol{x} + \delta\boldsymbol{x})$ と書けますが、両式の差をとると

$$\delta\ddot{x}^i = -\partial_i \partial_j \phi(\boldsymbol{x}) \delta x^j \tag{1}$$

という潮汐力の式が得られます。

特殊相対性原理 (狭義相対論)　すべての慣性系における物理法則の共変性を主張
一般相対性原理 (広義相対論)　すべての座標系における物理法則の共変性を主張

共変性とは、テンソル算によって座標系の取り方に依らず同じ形式で表される、という程度の意味だと思っていただいて結構です。以下、講義は黒板を使って行います。配布したビッグバン宇宙国際研究センター特製ノートパッドにノートをとりながら聞いて下さい。手で字を書くことによって脳細胞が刺激され、知識が定着することが示されているので、どんなに IT の時代になっても、この原始的な方法が最も教育効果が高いのです。

テンソル算のお約束

1) ギリシャ文字の添字 $\mu, \nu, \alpha, \beta, \ldots$ は一般座標における時空座標を表し、$\mu = 0, 1, 2, 3$ をとり、ローマ字の中程以降 $i, j, k, l, m, \ldots$ は同じく空間座標のみを表し、$i = 1, 2, 3$ を走るものとします。
2) (**アインシュタインの規則**)　上下に同じ添字が現れた場合には、ギリシャ文字については 0 から 3 まで、ローマ字については 1 から 3 迄の和をとるものと了解します。 例 $A^\mu B_\mu = A^\alpha B_\alpha = \sum_{\nu=0}^{3} A^\nu B_\nu$.
3) 計量テンソル $g_{\mu\nu}$ によって添字の上げ下げをします。 例 $T^\mu_{\ \nu} = g_{\nu\sigma} T^{\mu\sigma}$.
4) 添字 a, b, c, d は、局所慣性系 (ミンコフスキー計量) の座標 X^a を表すものとします。(本講義のローカルルール)　例 $ds^2 = \eta_{ab} dX^a dX^b$.
5) (**テンソル量の変換則**) 座標変換に対し添字を持った量は、変換行列によって既存の添字を潰して新しい添字を同じ場所に設けるように変換する、と覚えればよいのです。