

数値相対論の紹介

柴田 大

京都大学 基礎物理学研究所



2014/4/18

$\log p(\text{g/cm}^3)$

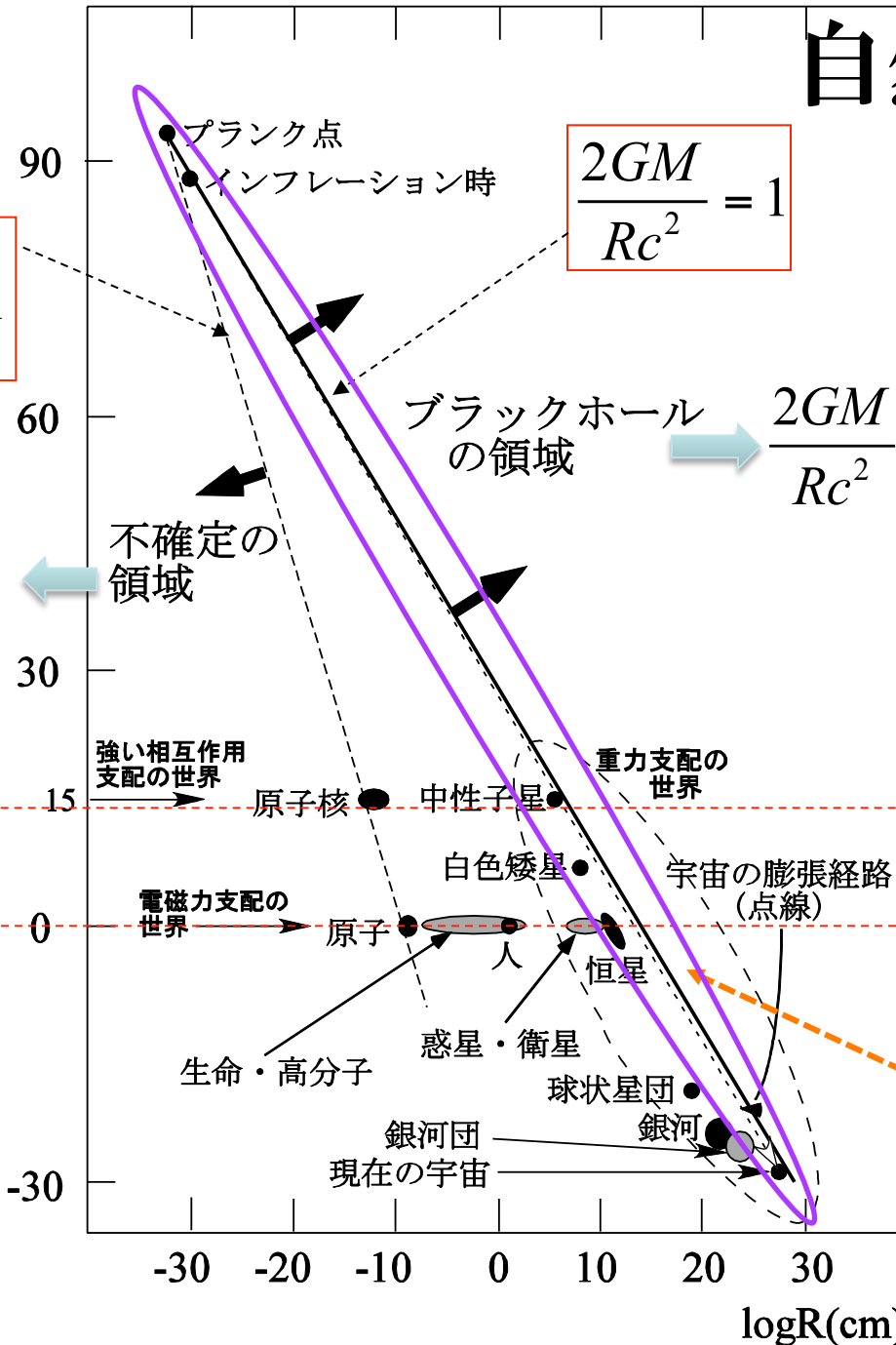
自然界の階層構造

$$\frac{h}{MRc} = 1$$

$$\frac{2GM}{Rc^2} = 1$$

$$\frac{h}{MRc} > 1$$

$$\frac{2GM}{Rc^2} > 1$$



強い相互作用が
支配する世界

電磁気力が支配する世界

重力が支配する世界

宇宙と天体

❖ 重力が主要な力として働き構造をつくるもの

重力が支配的なのは巨大なもののみ：

小さくなると通常、電磁気力が圧倒的に強いから

❖ 重力の強弱は、無次元量 $=2GM/Rc^2$ で決まる。

これが1を超えればブラックホール。

宇宙全体も1に近い。一方銀河系や太陽は $\sim 10^{-6}$

❖ $2GM/Rc^2=0.1$ を超えるようなものは強重力天体とされ、一般相対論的天体と呼ばれる

❖ 一般相対論的天体：中性子星、ブラックホール、宇宙そのもの。これらを対象とするのが、一般相対論的天体物理学や宇宙論

一般相対論的天体と天体現象の特徴

- ❖ **高密度(コンパクト)**：中性子星の質量は太陽と大差ないが半径は10km程度で最大密度 $\sim 10^{15} \text{ g/cm}^3$
- ❖ **高温、高エネルギー現象**：例、ブラックホールや中性子星周囲の降着円盤の温度 \sim 千万-億度K
- ❖ **重力、電磁気力、強い相互作用、弱い相互作用**のいずれもが重要な役割を果たす
 - **複雑だが、特有の面白さがある**
- ❖ 往々にして、**時間変動の激しい、高エネルギー爆発現象**を伴う：超新星爆発、高速ジェット、ガンマ線バースト → **極限状態が実現される。**
 - 恒星や惑星系とは大きく異なる
 - 観測手段が異なる、観測例が少なく謎多し

超新星残骸（カニ星雲）

電磁波観測

中心に中性子星が存在するが、コンパクトかつ周囲が不透明ゆえに直接観測するのは難しい

一般相対論的天体物理学の未解決問題

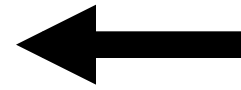
- 重力波は直接的には未検証 → **KAGRAに期待**
- 種々のブラックホールの誕生過程は未解明
- ブラックホールの存在は、直接的には未検証：
ブラックホール近傍の曲がった時空は未検証
- 2つのブラックホールやブラックホールと中性子星からなる連星は未発見：連星中性子星は発見済
- 中性子星の内部状態/状態方程式はよく判っていない
- 中性子星の磁場の強度はなぜ典型的に 10^{12} ガウス？
- 中性子星磁場の進化の起源は未解明
- ジェットの発生機構は長年の問題
- 継続時間の短いガンマ線バーストの起源は？
- 超新星爆発のメカニズムの解明も道半ば
- 金、銀、プラチナなどの重元素の起源は？
- そもそも一般相対論は常に正しいのか？

今日の結論

未解決問題の解決に、
重力波観測や数値相対論
は大いに寄与するだろう

数値相対論の概要：以下の式を近似なしに解く (要、数値計算)

$$G_{\mu\nu} = 8\pi \frac{G}{c^4} T_{\mu\nu}$$



**Einstein equation
(Gravity)**

$$\left(\begin{array}{l} \nabla_{\mu} T_{\nu}^{\mu} = 0 \\ \nabla_{\mu} (\rho u^{\mu}) = 0 \\ \nabla_{\mu} (\rho u^{\mu} Y_l) = Q_l \\ \nabla_{\mu} F^{\mu\nu} = -4\pi j^{\nu} \\ \nabla_{[\mu} F_{\nu\lambda]} = 0 \\ p^{\alpha} \partial_{\alpha} f + \dot{p}^{\alpha} \frac{\partial f}{\partial p^{\alpha}} = S \end{array} \right)$$

Strong/weak interaction

**Matter fields in
genera relativity**

**Electromagnetic
interaction**

**Neutrino transport:
Weak interaction**

準備 1：恒星の進化

- ・ 恒星は、核融合反応を繰り返し進化する
- ・ 恒星の運命は、主に初期質量で決まる。

初期質量が太陽の
10倍以上だと、
鉄に至る

鉄は燃えない

Core

$H \Rightarrow He$

$He \Rightarrow C, O$

$C \Rightarrow Ne, Mg$

$O \Rightarrow Si, S$

$Si, S \Rightarrow Fe$

Fe

段階的な核融合反応

重力崩壊



超新星爆発

中性子星か
ブラックホール

$H \rightarrow He$

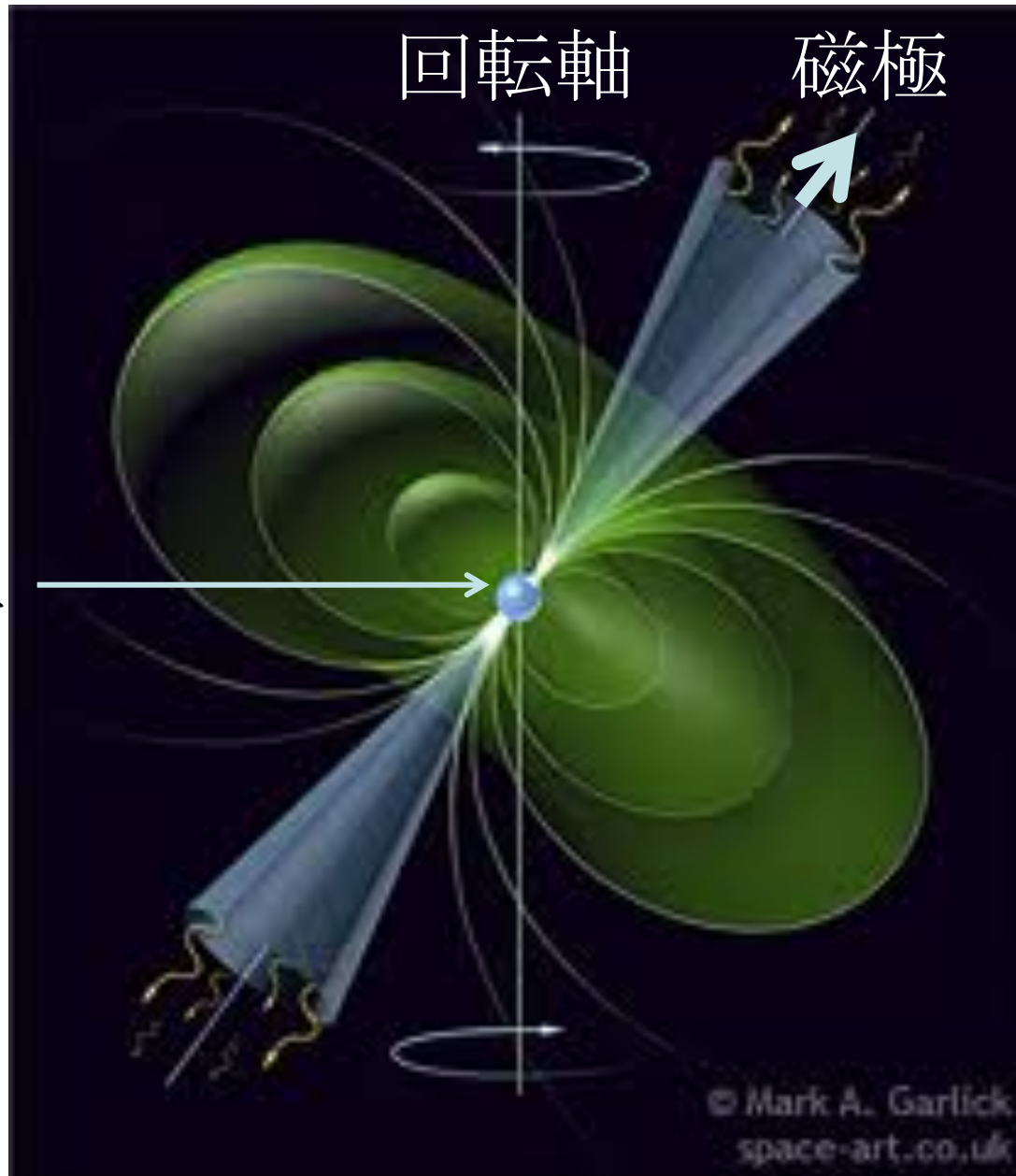


太陽

準備2：中性子星とは

- 主に中性子からなる高密度天体
- 半径：10—15km
- 質量：太陽のせいぜい2倍、典型的には1.4倍
- 平均密度は約 10^{14} g/cc程度
- これまでに約2200個発見
- 主にパルサーとして観測される
- 典型的に 10^{12} ガウスの強磁場を持つ
- 周期は典型的に0.1—1 秒程度
- **ブラックホール**：中性子星になるには質量が大きすぎて、重力崩壊で誕生する天体。

パルサー



中性子星

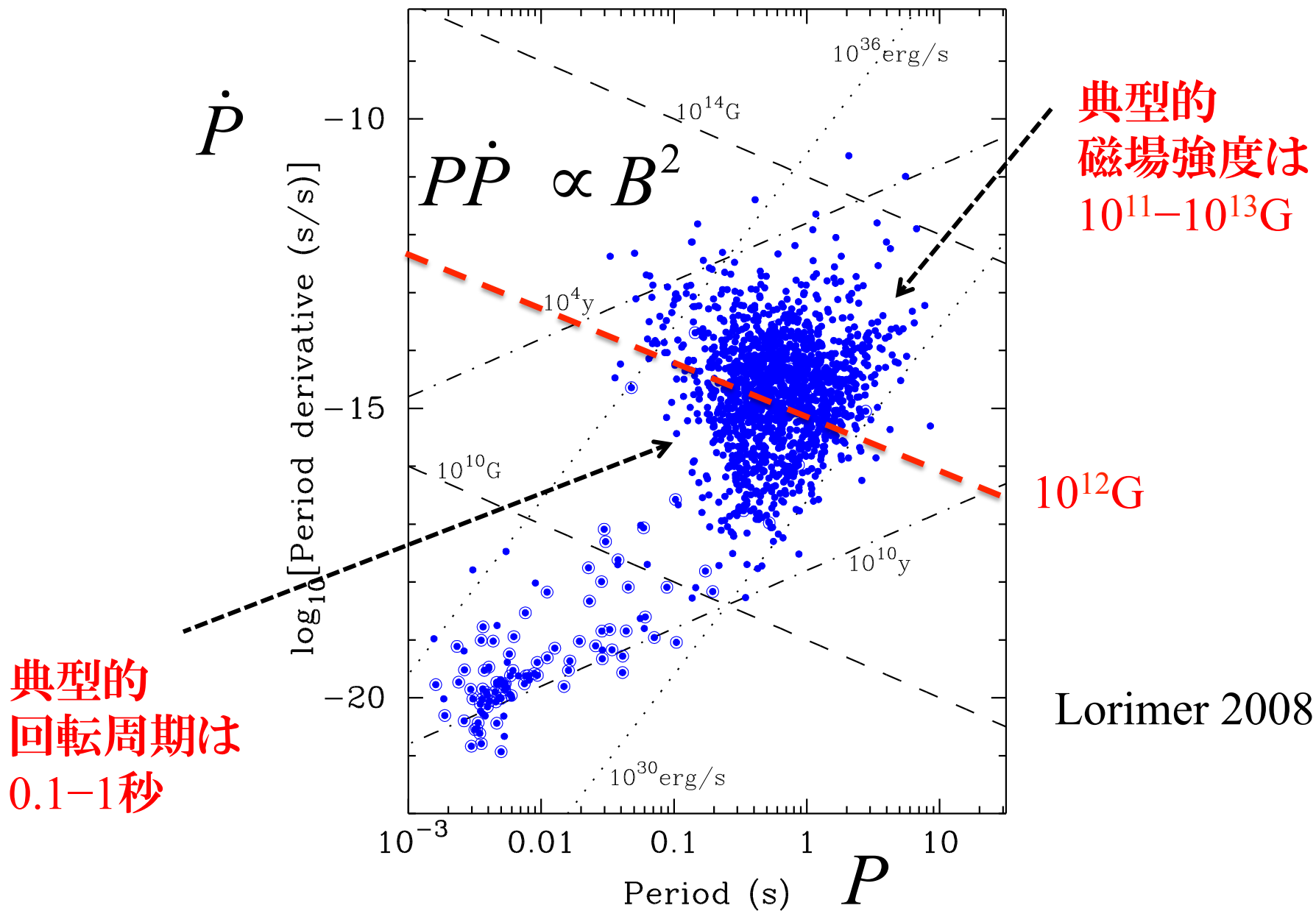
磁極方向
に放射



観測される

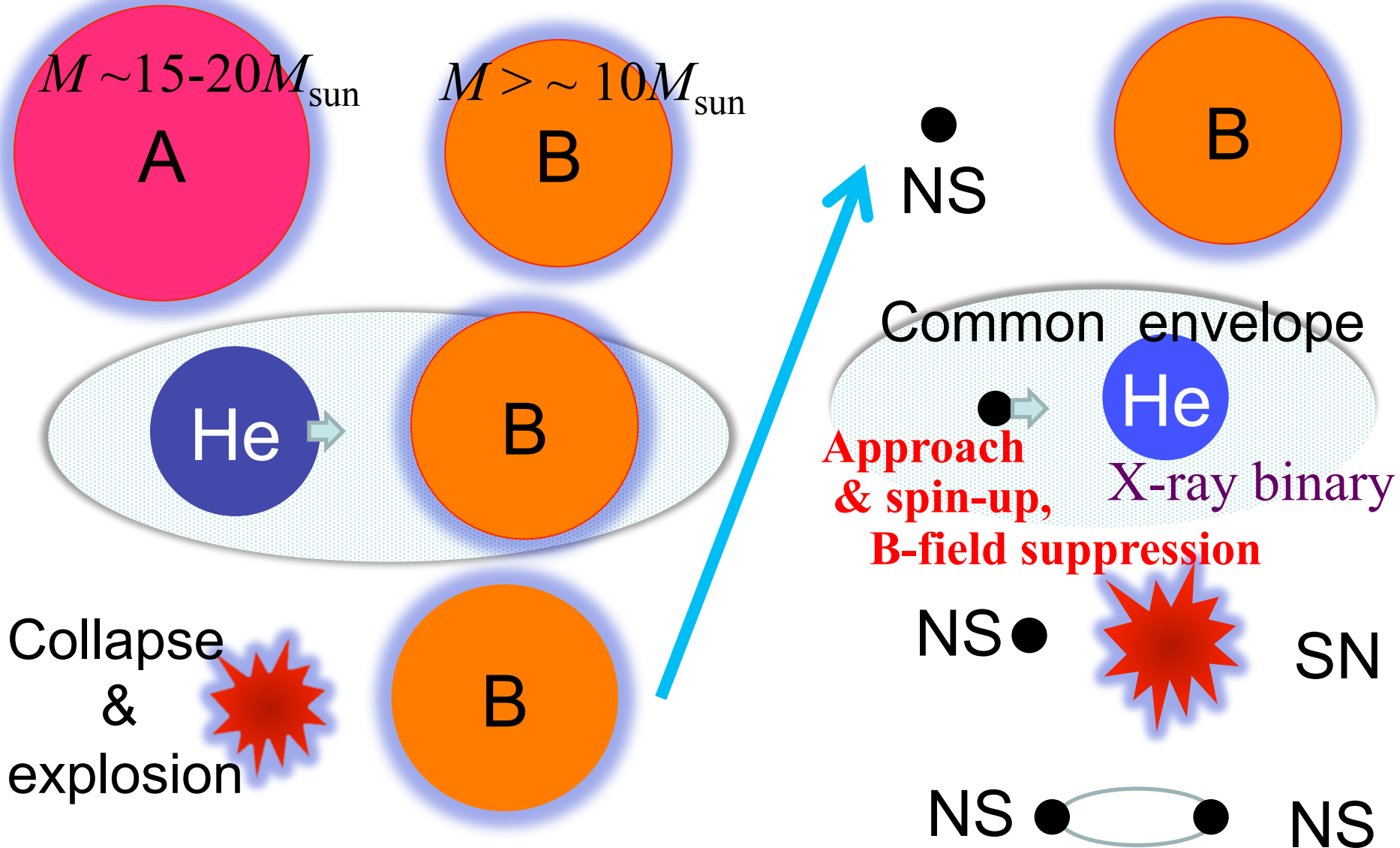
1968年以来
2200個以上
発見された

$P - \dot{P}$ diagram of pulsars

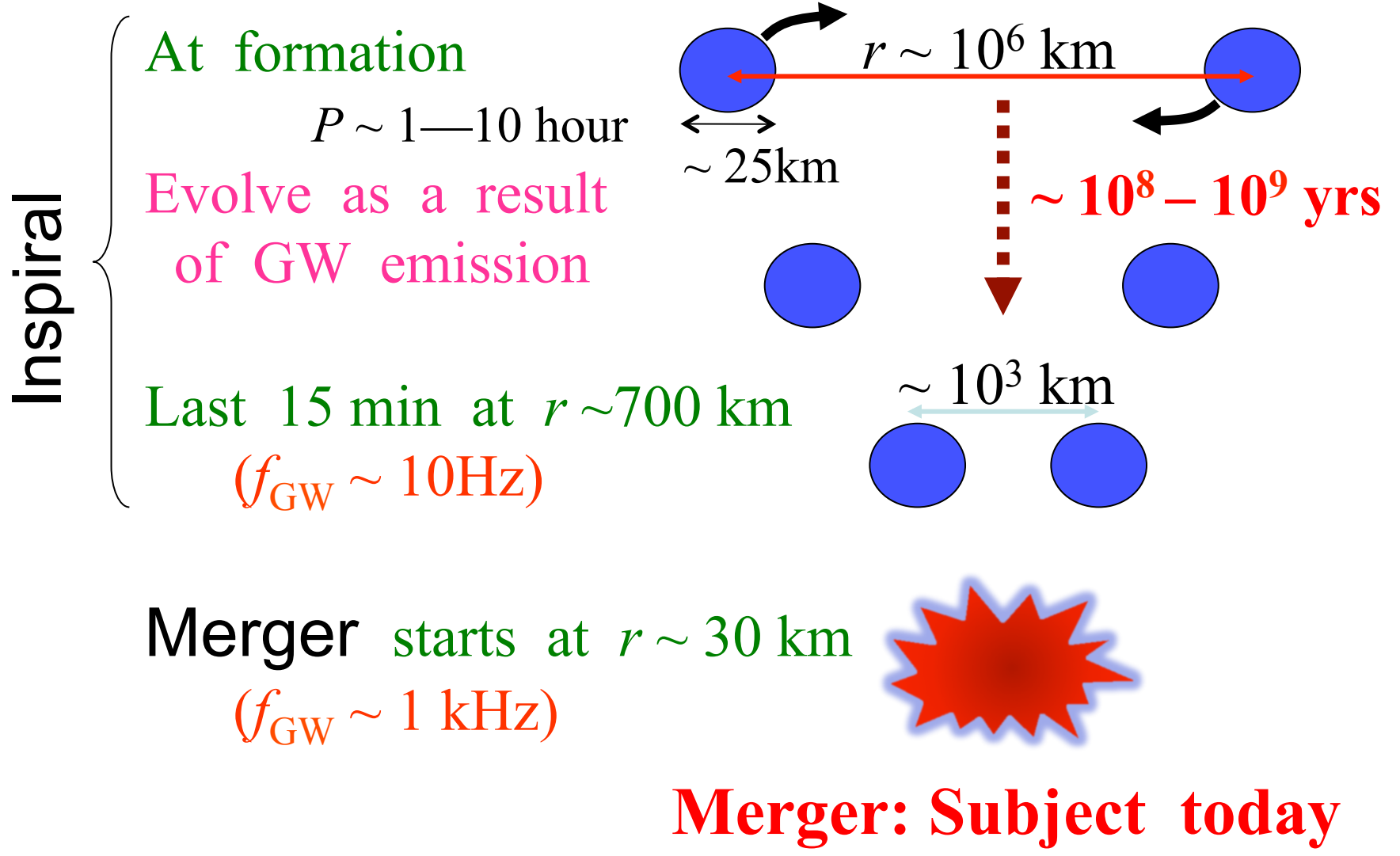


準備3:コンパクト星連星の形成と進化

Typical formation scenario



Predicted evolution of compact NS-NS ($M_{\text{NS}}=1.4M_{\text{sun}}$)



Galactic *compact* NS-NS observed

E.g., <http://stellarcollapse.org/nsmasses>

PSR	$P(\text{day})$	e	$M(M_{\text{sun}})$	M_1	M_2	T_{GW}
1. B1913+16	0.323	0.617	2.828	1.441	1.387	3.0
2. B1534+12	0.421	0.274	2.678	1.333	1.345	27
3. B2127+11C	0.335	0.681	2.71	1.35	1.36	2.2
4. J0737-3039	0.102	0.088	2.58	1.34	1.25	0.86
5. J1756-2251	0.32	0.18	2.58	1.31	1.26	17
6. J1906+746	0.166	0.085	2.57	1.29	1.32	3.1

* 10^8 yrs

球状星団
に存在

↑
Orbital
period

↑
Eccentricity

↑
Mass

Merger
time

→ Galactic merger rate $\sim 1/10^{5\pm 1}$ yrs

(e.g. Kalogera et al., 2007, Abadie et al. 2010)

→ Merger rate $\sim 1-100/\text{yr}/(300\text{Mpc})^3$

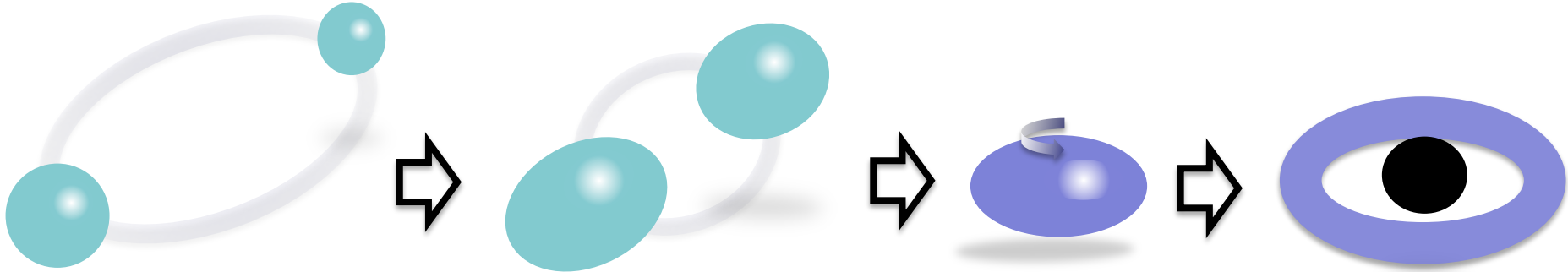
典型的な重力波波形：連星中性子星の場合

Early Inspiral
($r_{\text{orb}} \gg R_{\text{NS}}$)

Late inspiral
($r_{\text{orb}} \leq 5R_{\text{NS}}$)

Merger =>
Hypermassive NS

Black hole & torus
& GRB?



Point mass phase
Adiabatic phase

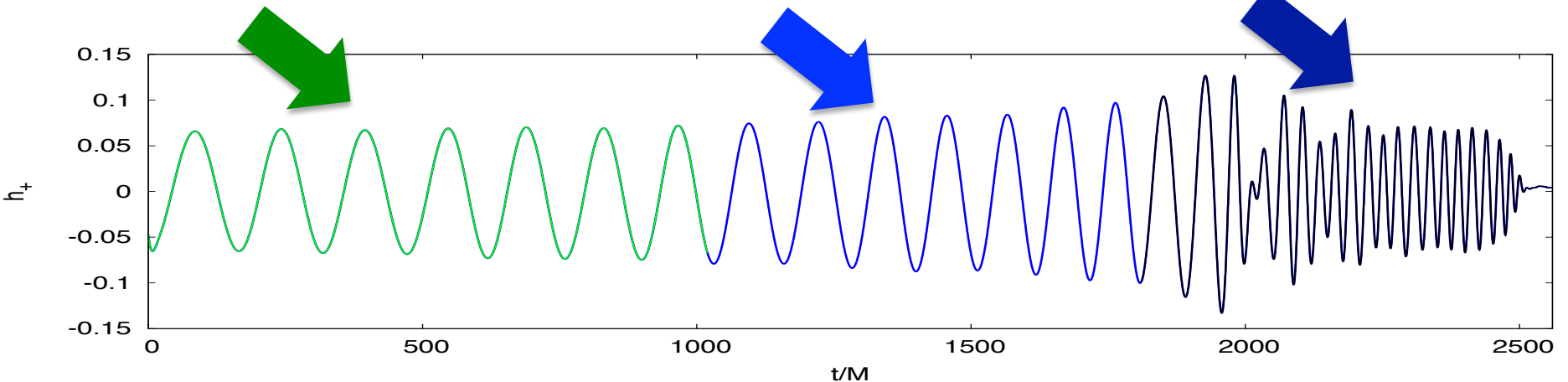
Tidally dominated phase

Dynamical & GR phase

Post-Newton

Post-Newton
with **tidal coupling or NR**

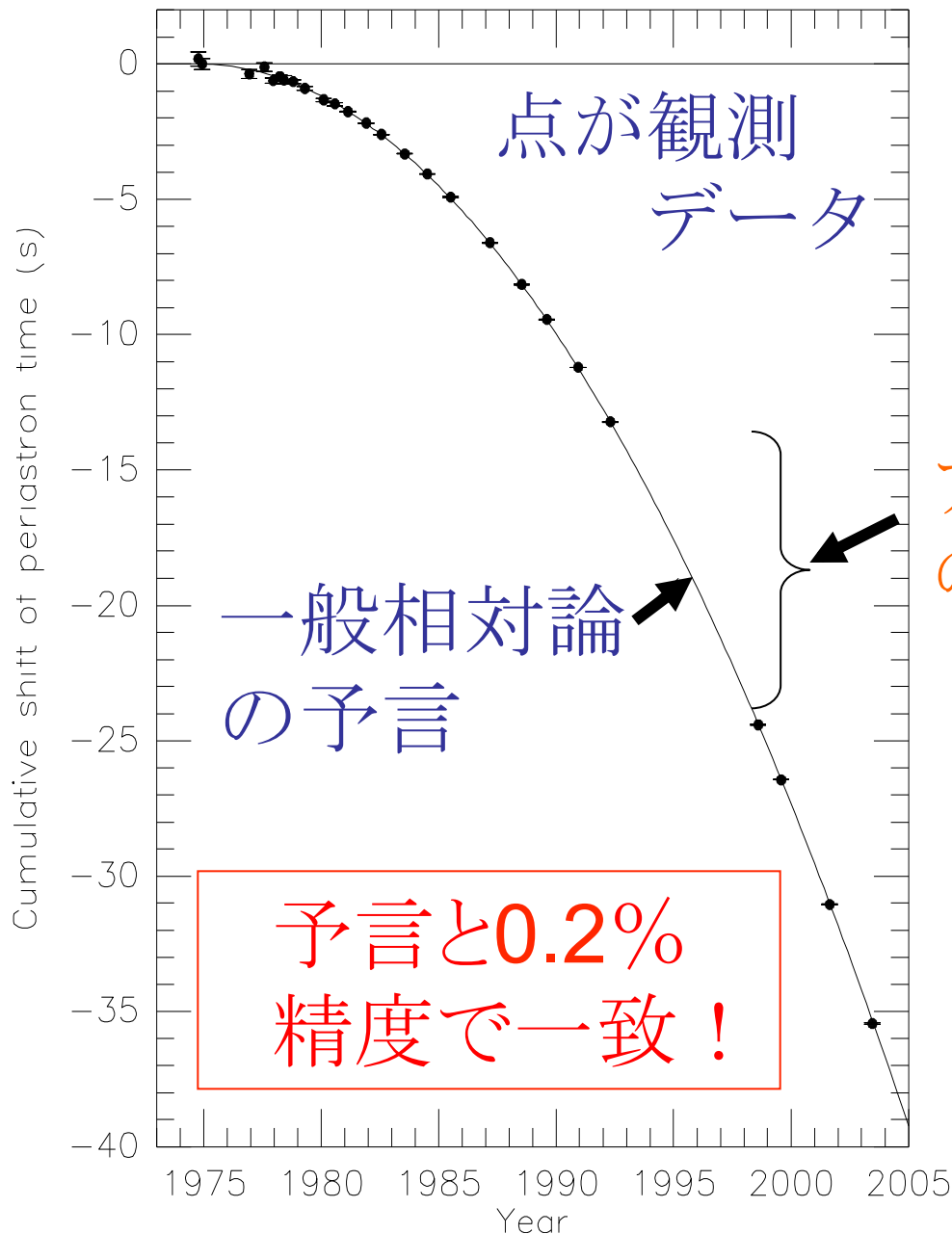
Numerical relativity



PSR B1913+16の軌道変化



近星点から
近星点へ
達する時間
のずれを
積算した
時間
(単位：秒)



アレンボ望遠鏡
の閉鎖時期

Taylor &
Weisberg
2004

西暦

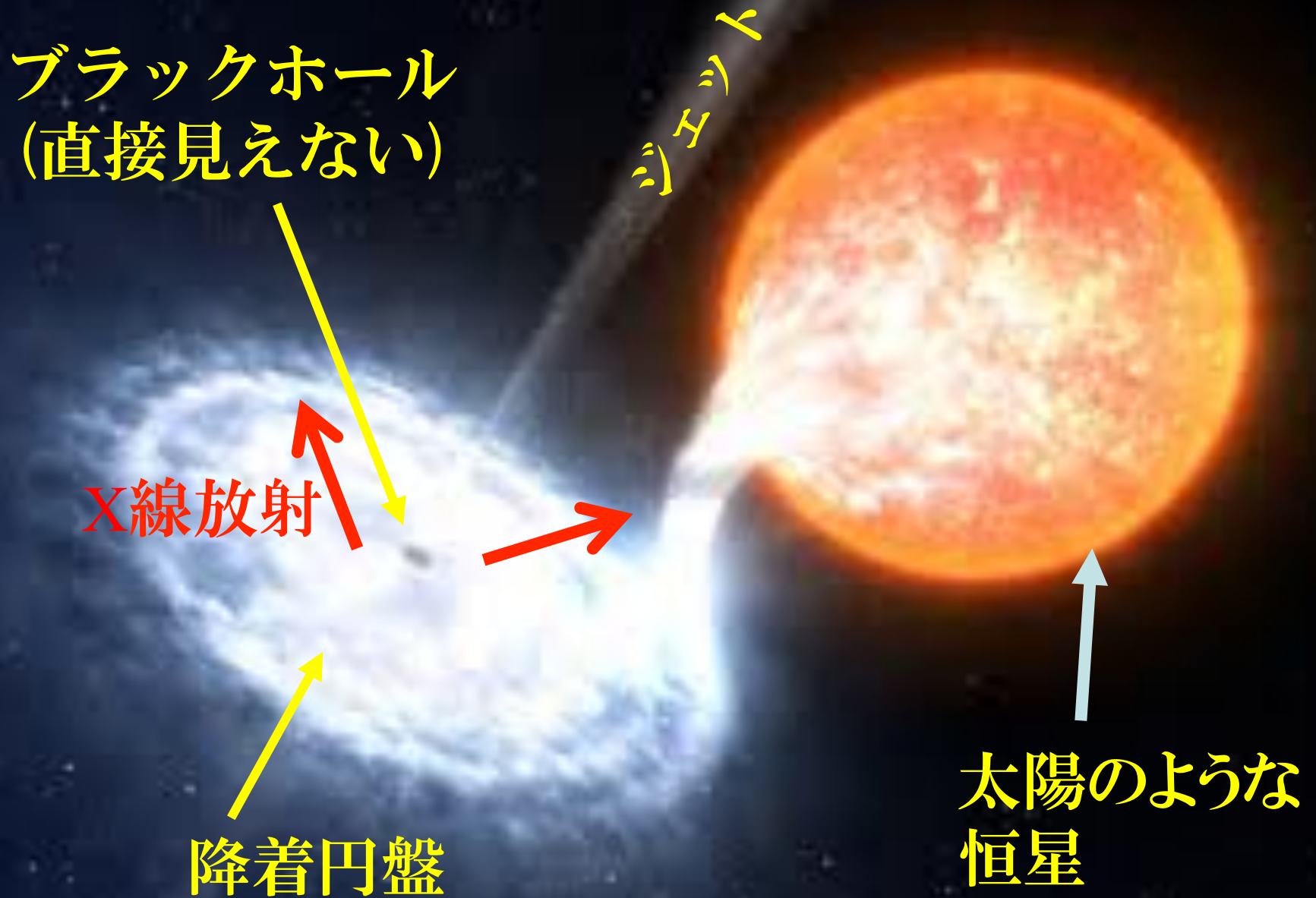
未解決問題にどう挑むか

1. 種々のブラックホールの誕生過程は未解明
2. 2つのブラックホールやブラックホールと中性子星からなる連星は未発見
3. ブラックホールは、直接的には未検証：
ブラックホール近傍の曲がった時空は未検証
4. 中性子星の内部状態/状態方程式は？
5. 継続時間の短いガンマ線バーストの起源は？
6. 金、銀、プラチナなどの重元素の起源は？
7. 一般相対論はどこまで正しいのか？

課題1

ブラックホールの 誕生過程の解明

ブラックホール連星：ブラックホールの証拠



見えない物体の質量を測る: 円軌道を仮定

- 測定可能量1 = 伴星の周期

G は万有引力定数。 M は全質量。

$$\left(\frac{P}{2\pi}\right)^2 = \frac{R^3}{GM}$$

- 測定可能量2 = 伴星の視線方向最大速度:
ドップラー効果の測定で決める

i は視線方向と軌道角運動量の角度

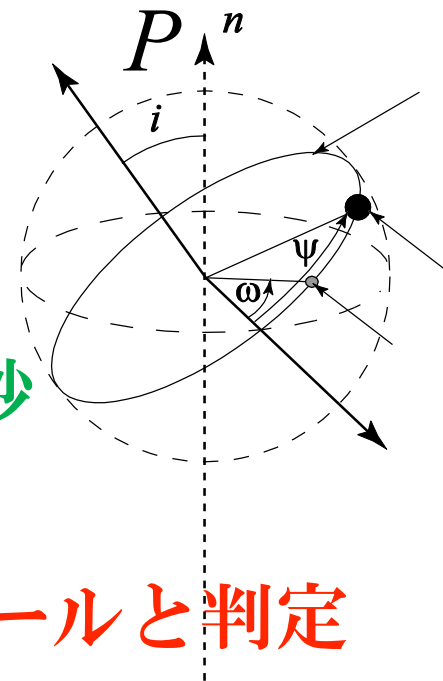
$$v_{\uparrow} = \frac{2\pi a \sin i}{P}$$

- 伴星の色(温度)

→ 伴星の質量(m)が推定される

- i の測定は難儀だが、軌道変化による微妙な明るさの変化から判る場合がある

$M - m$ が十分に大きければブラックホールと判定



ブラックホール候補

- 我々近傍の銀河内に存在する連星のうち、約20の候補の質量が太陽質量の3倍を超える
- 質量が3倍の太陽質量を超えてかつ光らないものは、ブラックホール以外考えられない
→ブラックホールと認定
- さらに約30のブラックホール候補が存在

恒星サイズのブラックホールは確かに存在する

アンドロメダ銀河

<http://apod.nasa.gov/apod/ap130626.html>

おそらく中心に
超巨大ブラックホール



我々からもっとも近い銀河の1つ。
それでも210万光年の距離。

我々の銀河系の中心の超巨大ブラックホール

- 銀河系中心のズームアップ
- 銀河中心の星の運動
(太陽系の大きさ程度の領域の観測結果)
- S2星の運動

<http://www.eso.org/public/videos/>

(ESAのホームページより)

大小のブラックホールは存在する。
しかし、どうやって誕生したかは謎！
それは観測するのが難しいから。

- 新たな観測手段が必要。重力波観測は最も有望かつ斬新な手段
- ただし理論的に正確な予言がないと、重力波を検出するのは難しい
→ 数値相対論が重要な役割を担う

恒星サイズのブラックホール

- 標準的には、大質量恒星の進化の最後に誕生すると考えられている

初期質量は太陽の10倍以上。

鉄は燃えない

Core

$H \Rightarrow He$

$He \Rightarrow C, O$

$C \Rightarrow Ne, Mg$

$O \Rightarrow Si, S$

$Si, S \Rightarrow Fe$

Fe

段階的な核融合反応

重力崩壊



超新星爆発

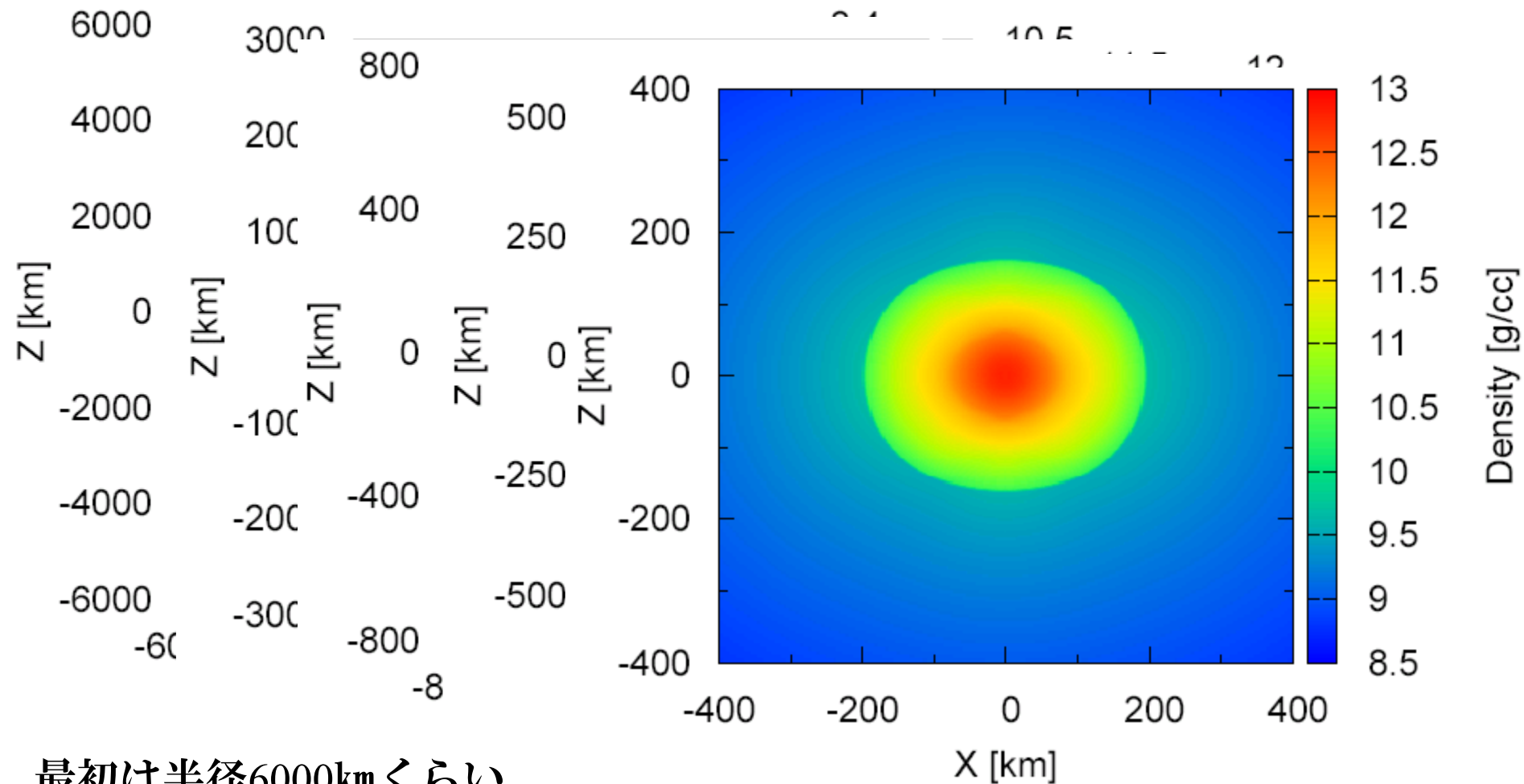
中性子星か
ブラックホール

$H \rightarrow He$



太陽

大質量星中心部の重力崩壊初期

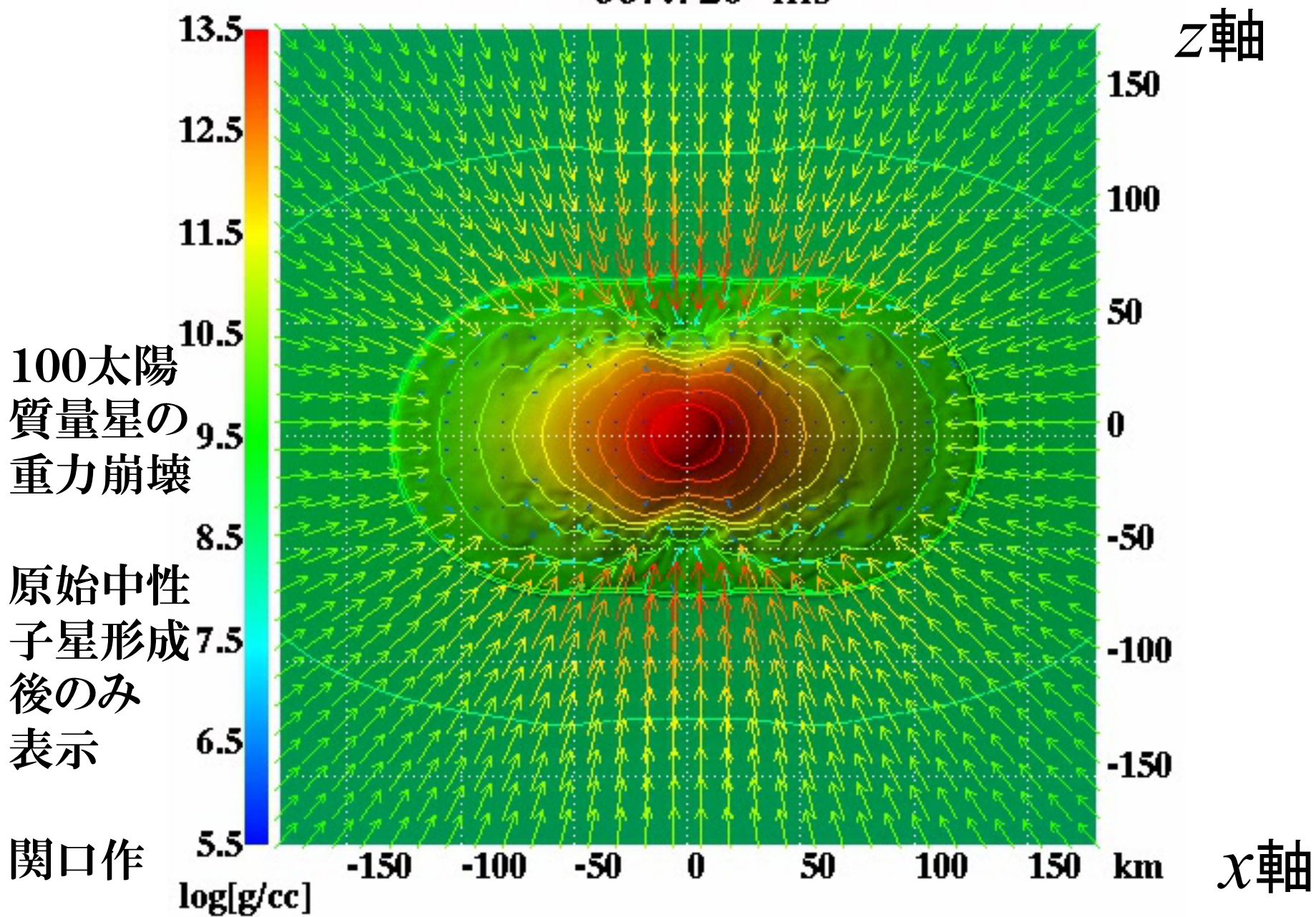


最初は半径6000kmくらい
地球半径とほぼ同じ

徐々に収縮

この頃に、原始中性子星が誕生。
半径は30km程度

667.720 ms 時間はミリ秒単位



超巨大ブラックホール

❖ どのように誕生したかは基本的には全く判っていない

1. 仮説1：ブラックホールが次々と合体
2. 仮説2：種となる大きなブラックホールにガスが降着

◇特に1の場合に重力波が大量放射しうる
→ 数値相対論で予言し、予言とおりの重力波を検出できれば強い証拠になる

課題2

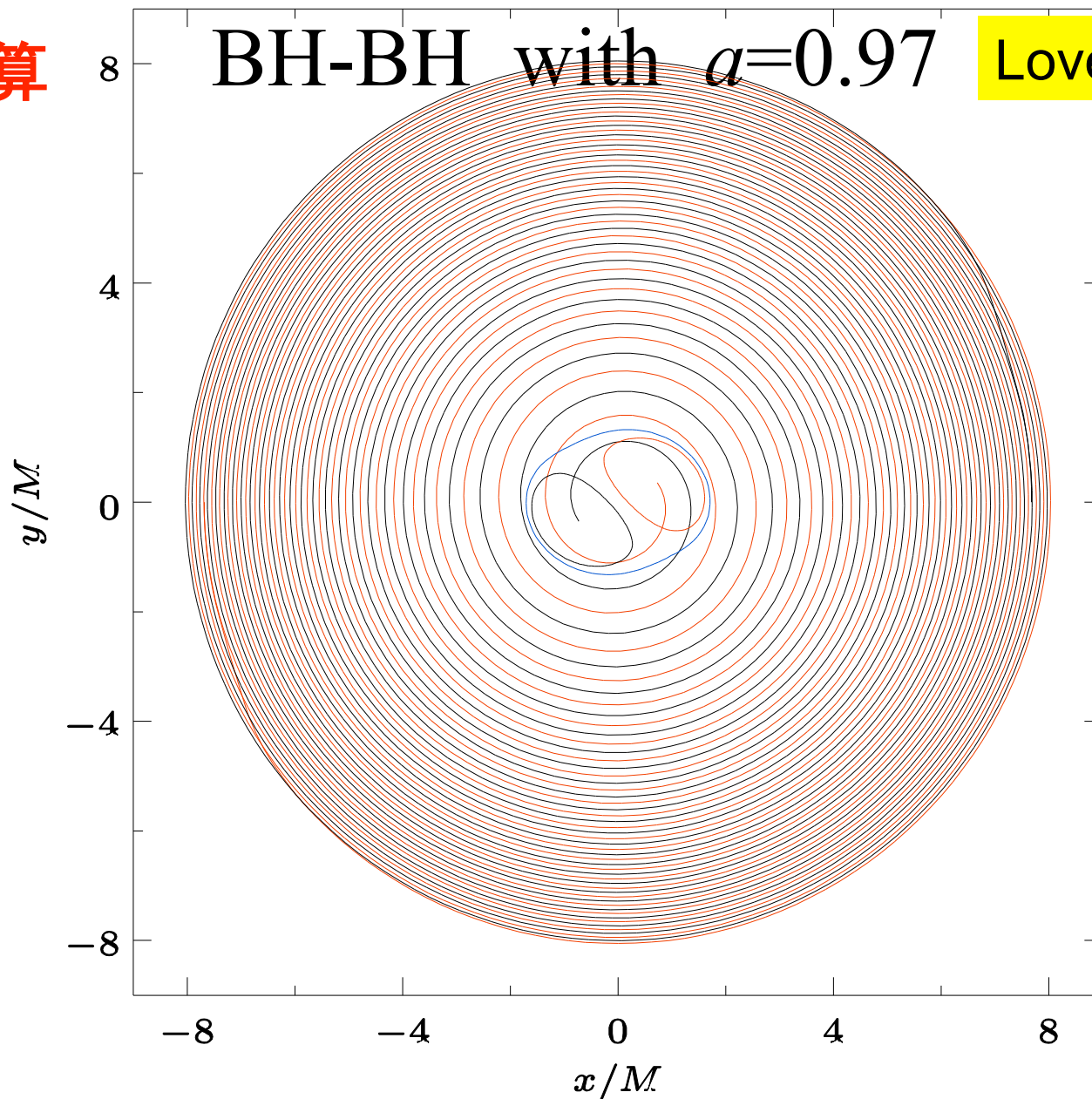
ブラックホール連星の発見

数値相対論によるブラックホール連星合体

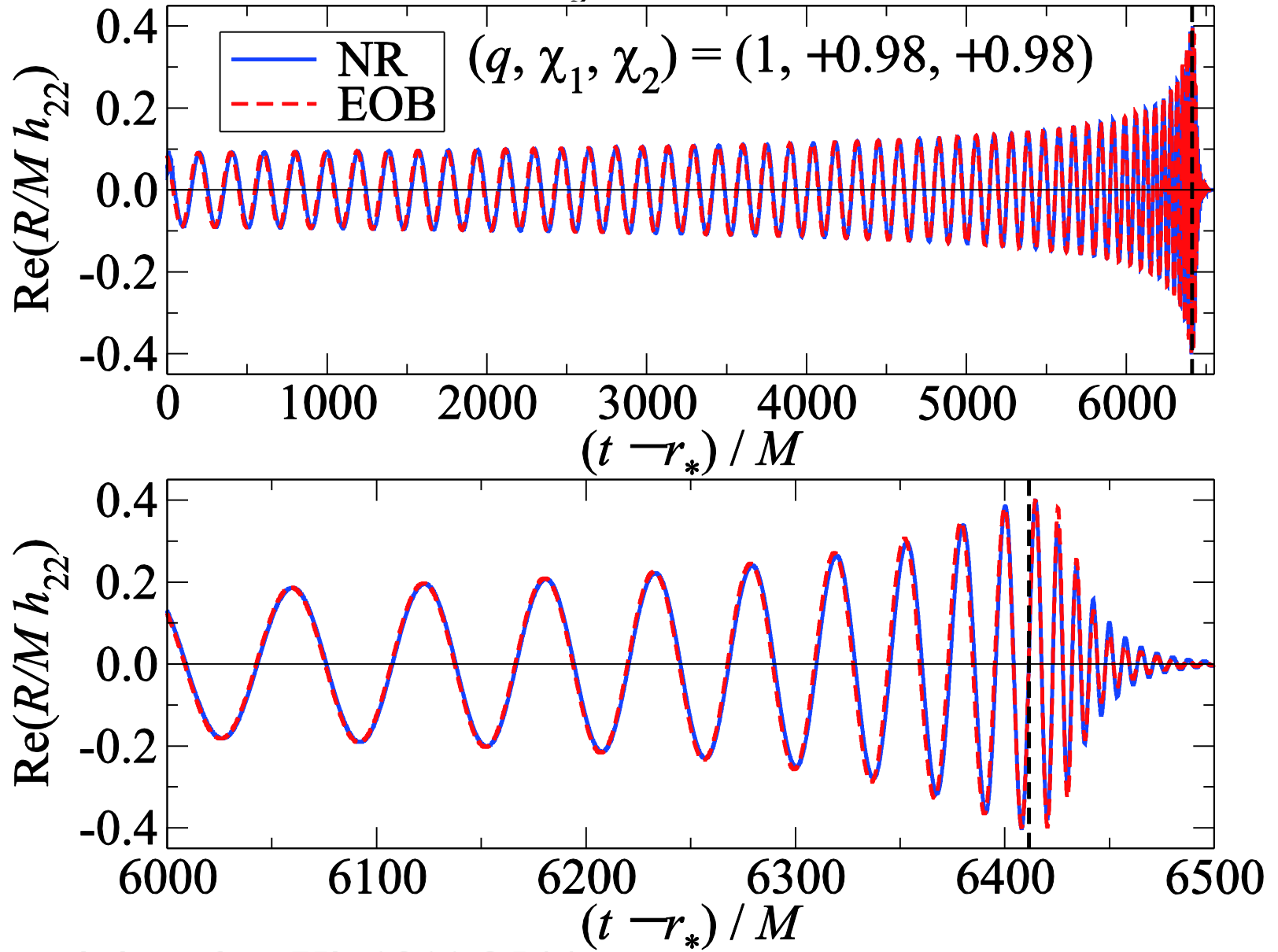
25周計算

BH-BH with $a=0.97$

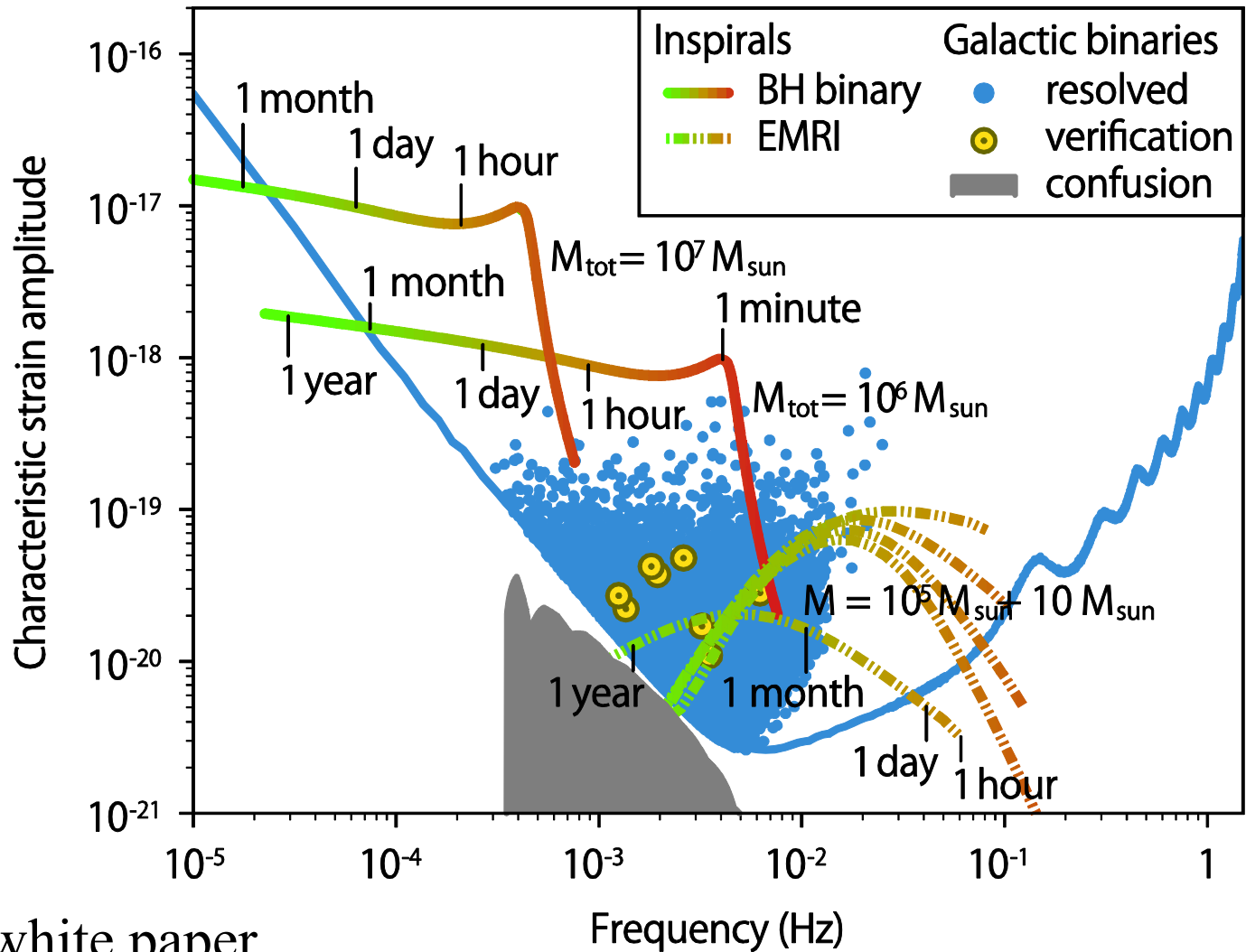
Lovelace+ 2012



Effective-one-body vs Numerical rela



eLISA: Gravitational Universe, 2034~



eLISA white paper

Signal-to-noise ratio (SNR)

1

10

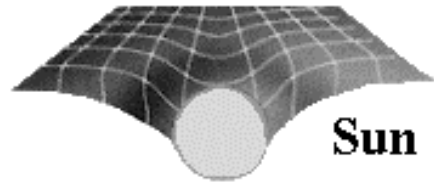
100



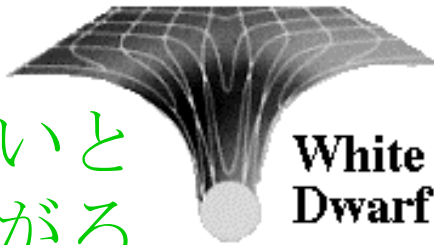
課題3

ブラックホールの 直接的検証

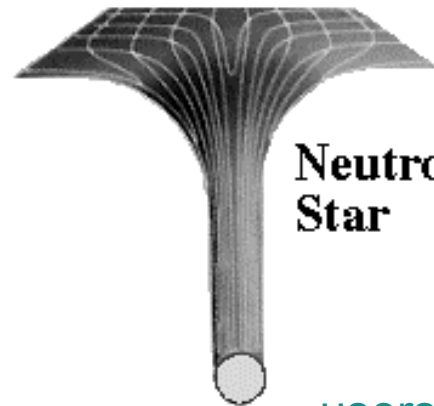
強い重力場の直接検証



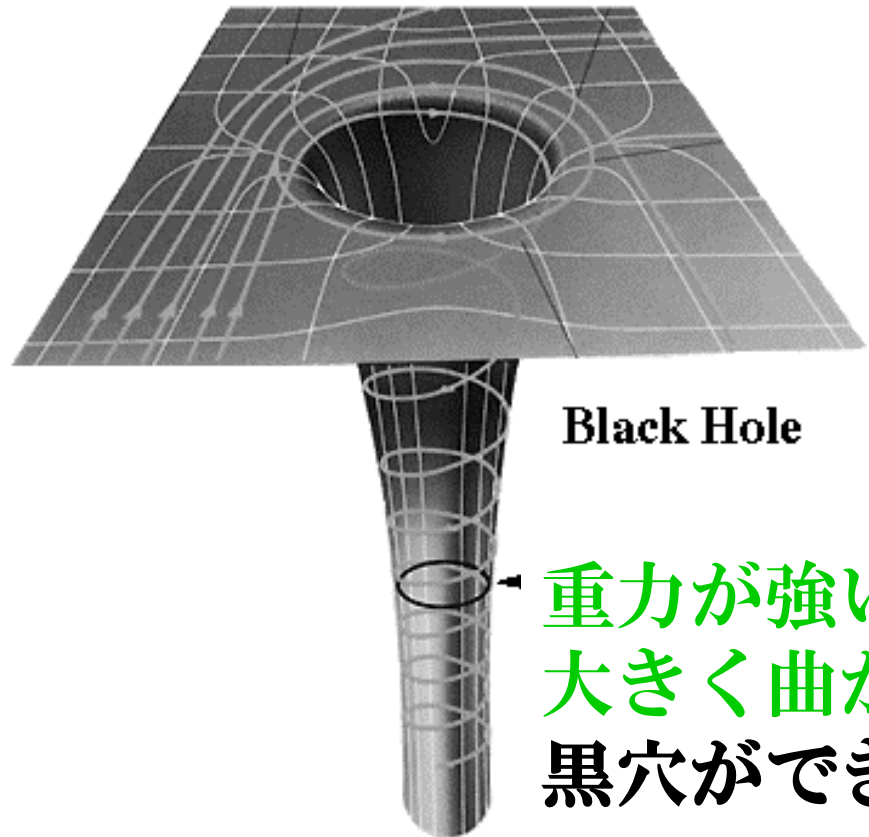
Sun



White Dwarf



Neutron Star



Black Hole

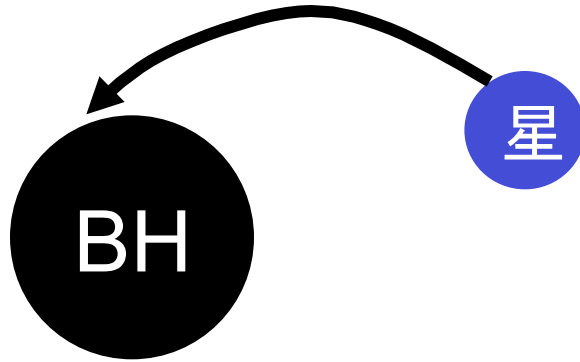
重力が弱いと
小さく曲がる

重力が強いと
大きく曲がる。
黒穴ができる。

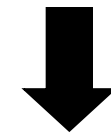
usersguidetotheuniverse.com

違いは重力源のコンパクトさによる
質量 ÷ 半径

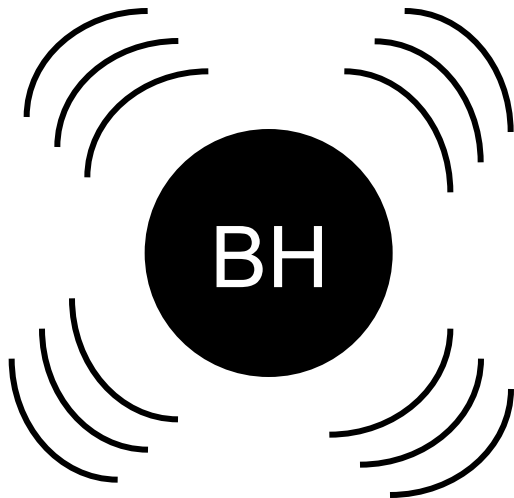
ブラックホールと重力波



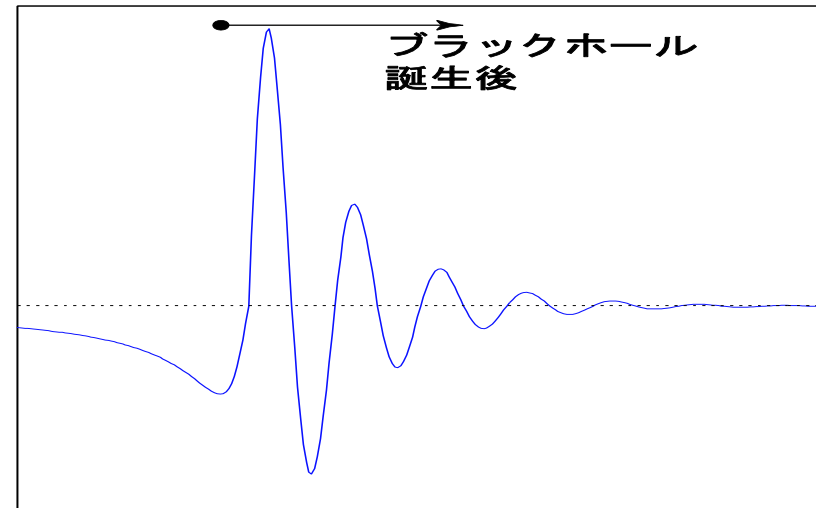
ブラックホールを
刺激する



ブラックホール近傍から
特有の重力波が発生する

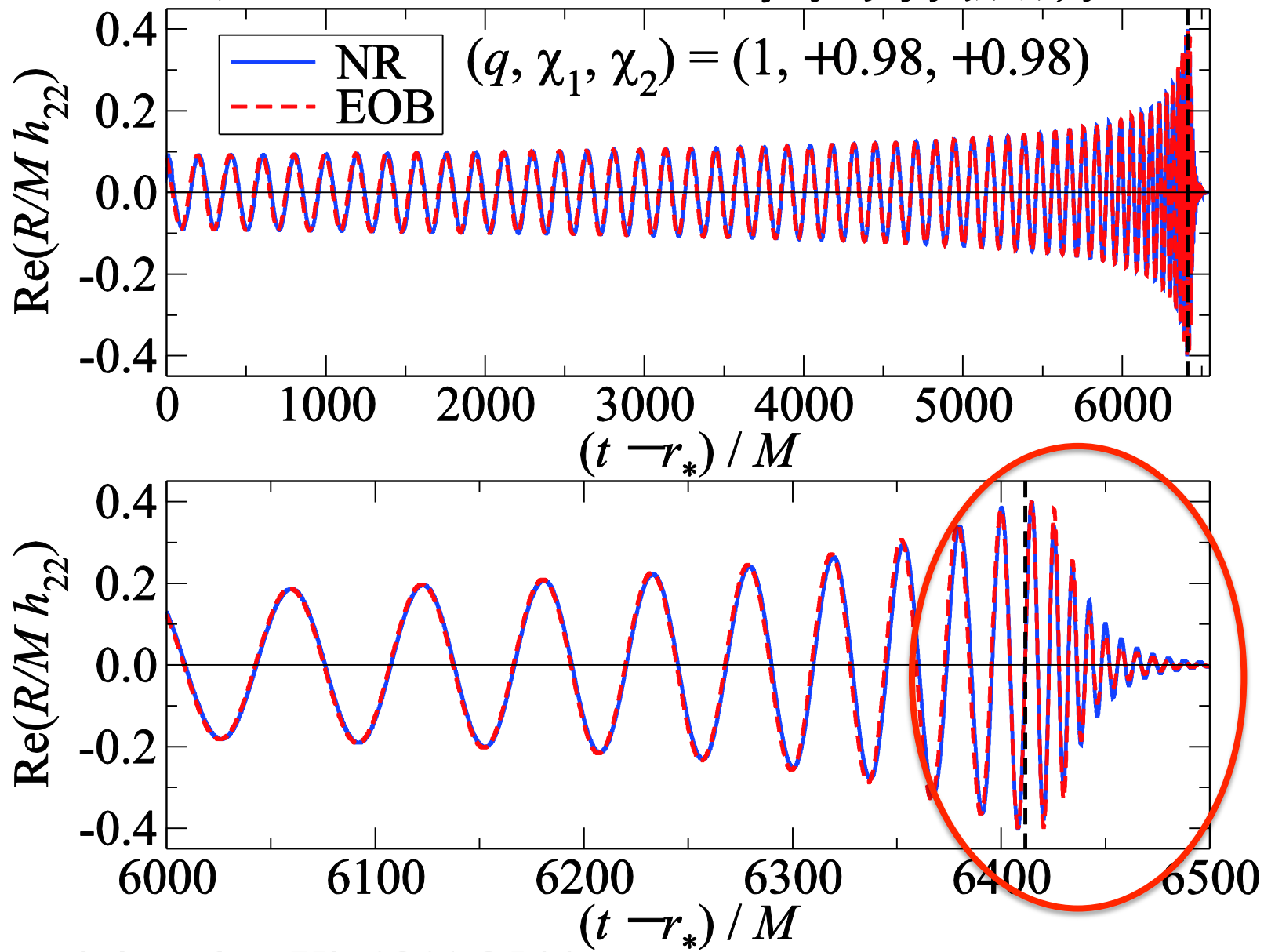


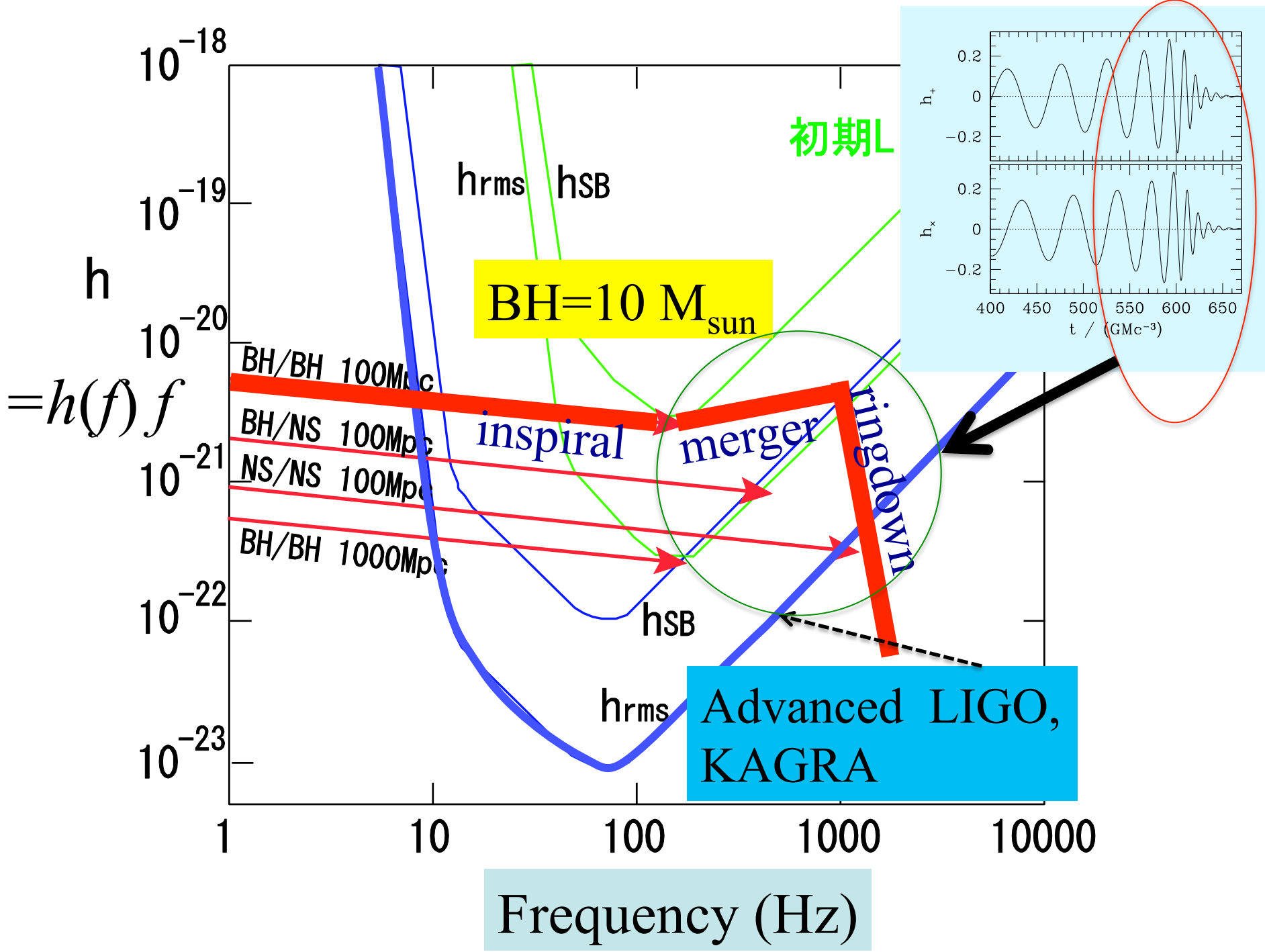
h
重力波
の振幅



時間

ブラックホールの準固有振動

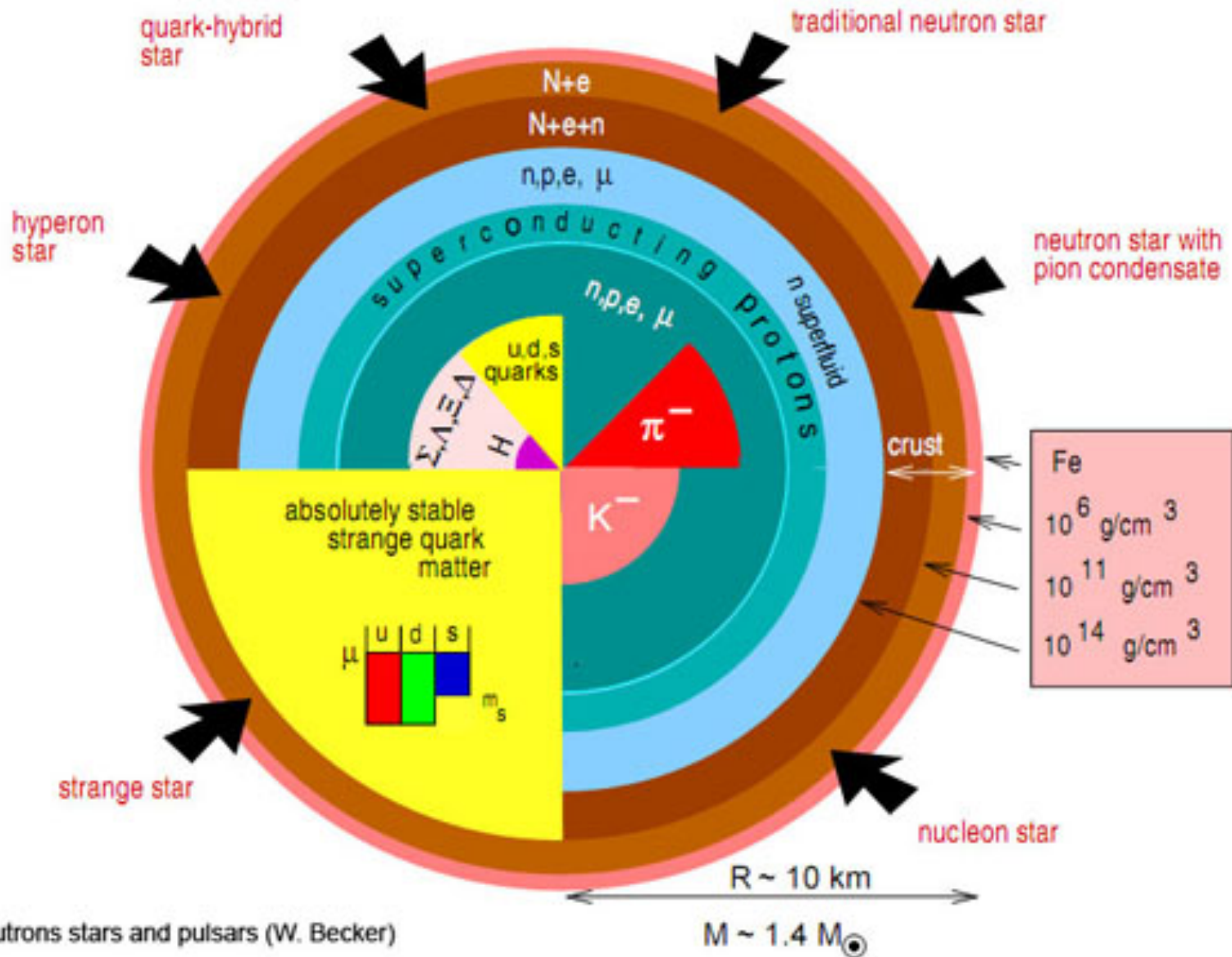




課題4

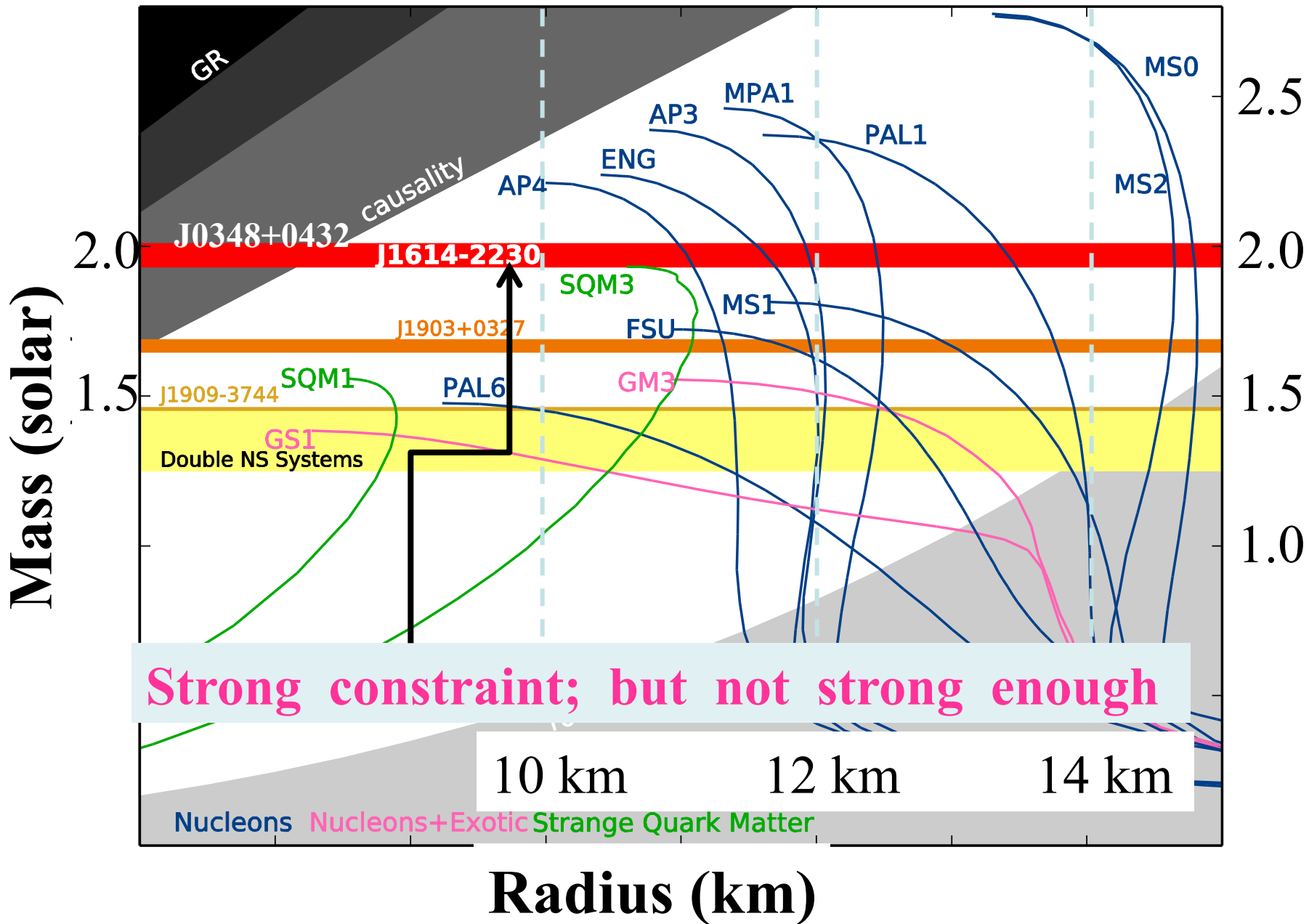
中性子星の内部構造の 解明

中性子星の構成要素の謎

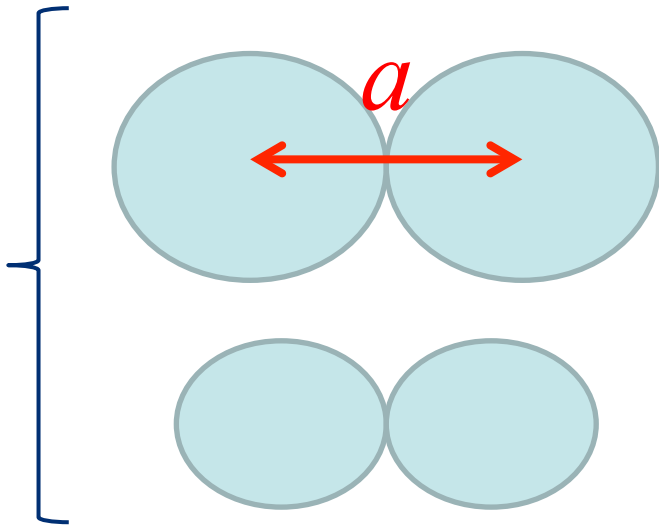


Source : Neutrons stars and pulsars (W. Becker)

中性子星の質量-半径関係：状態方程式に依存

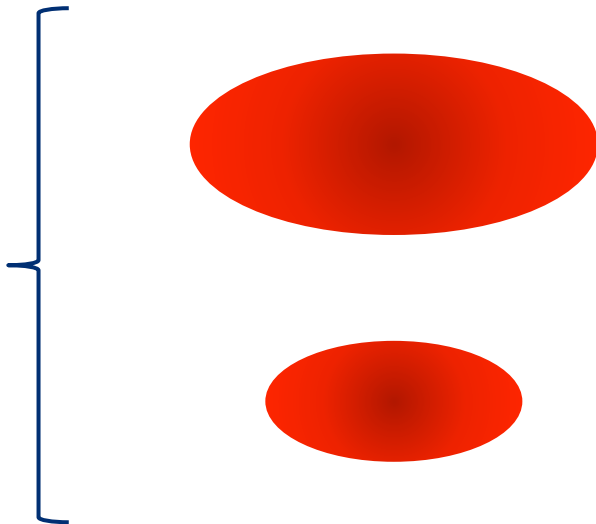


合体の情報は状態方程式を反映する



- 状態方程式が硬い = 中性子星の半径が大きい
- 合体時の重力波の周波数が低い

$$f = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{Gm_0}{a^3}}$$



- 合体後に誕生する中性子星の半径も、状態方程式を反映し、重力波の周波数にも反映される

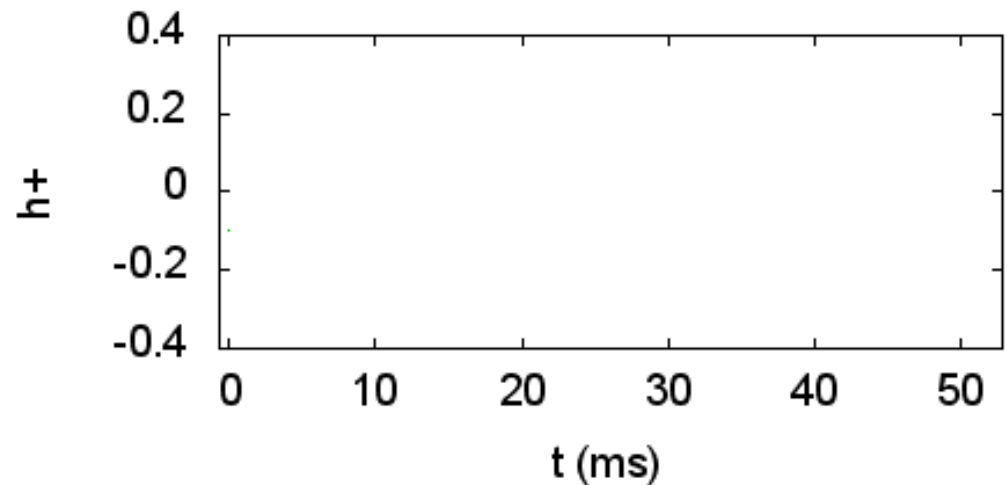
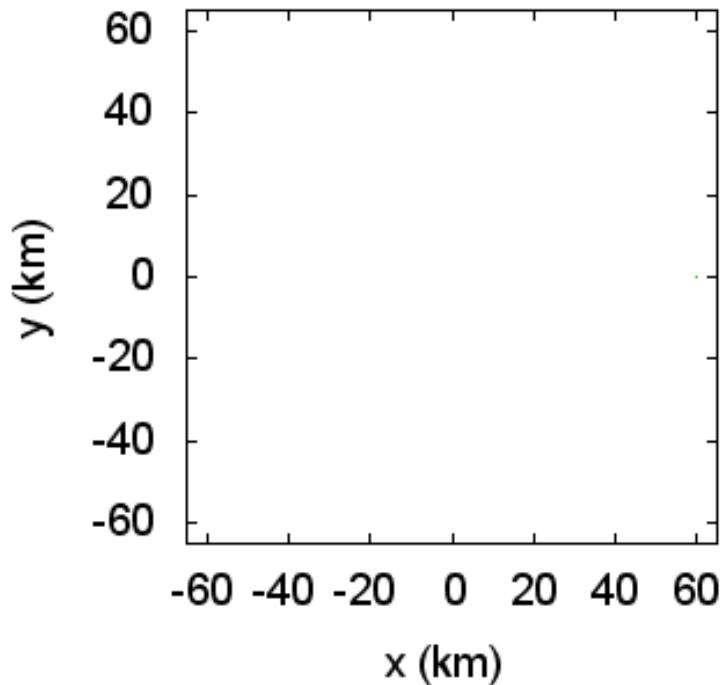
解析的計算による比較 (Effective One-Body)

1.35-1.35 M_{sun} , EOS: MS1 (stiff)

without tidal effects

with tidal effects

t=0 ms



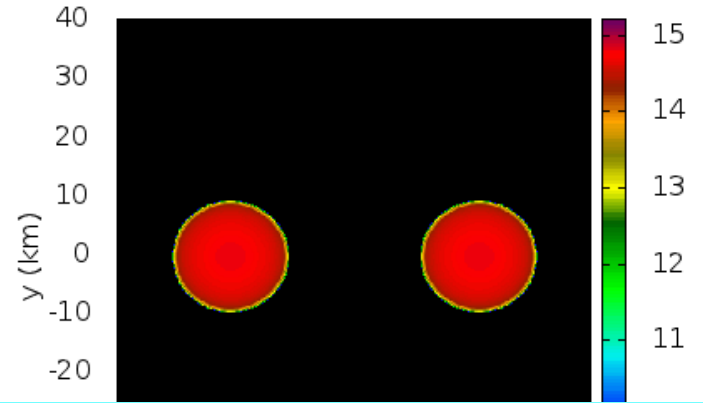
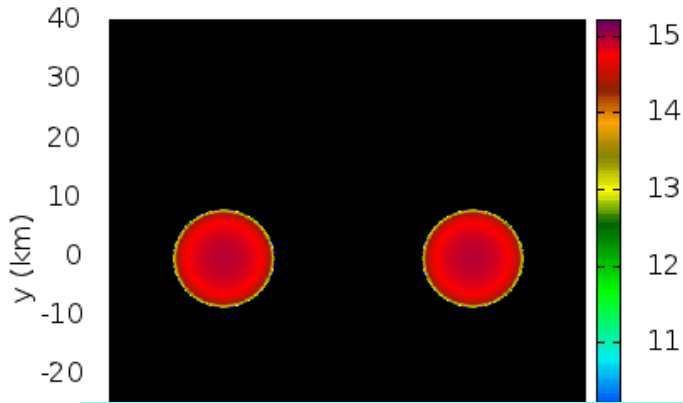
See, e.g., Pan et al., (2011)

Damour et al., (2012)

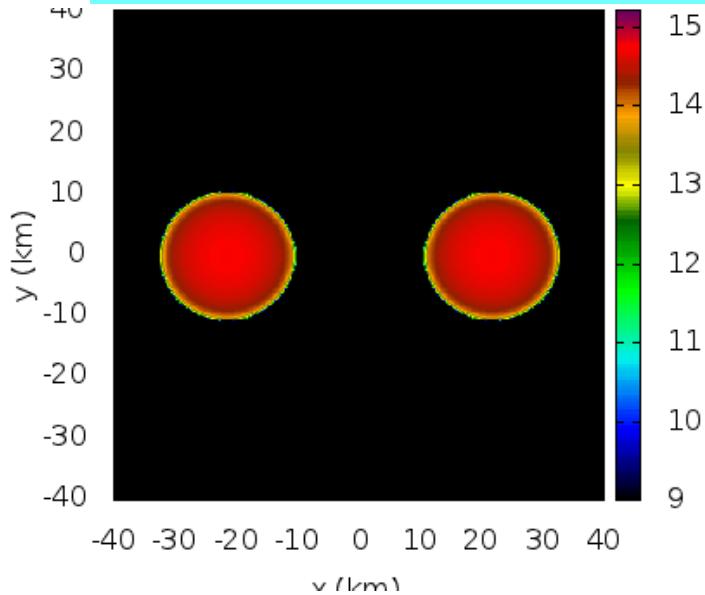
Merger of $1.35\text{-}1.35M_{\text{sun}}$ NS with four EoSs

$t=0$ ms

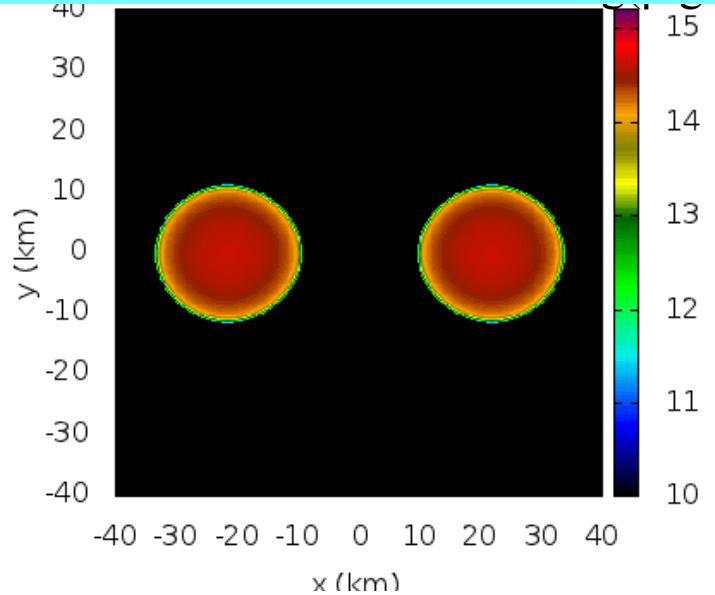
$t=0$ ms



状態方程式に関わらず、重い中性子星が一時的に誕生する。

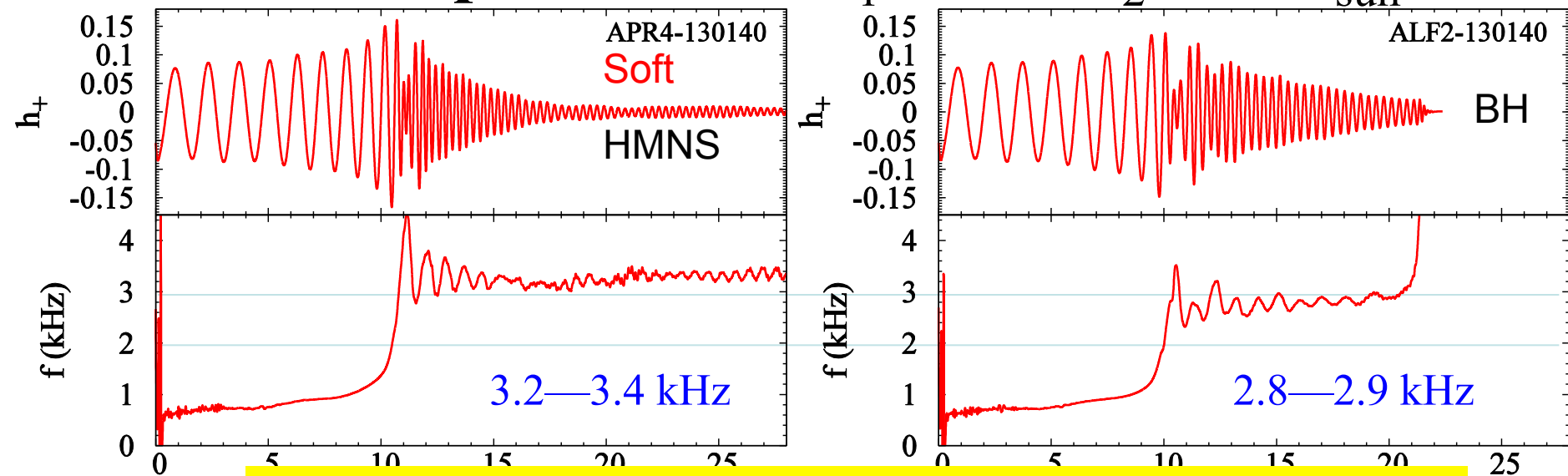


H4: $R=13.5\text{km}$

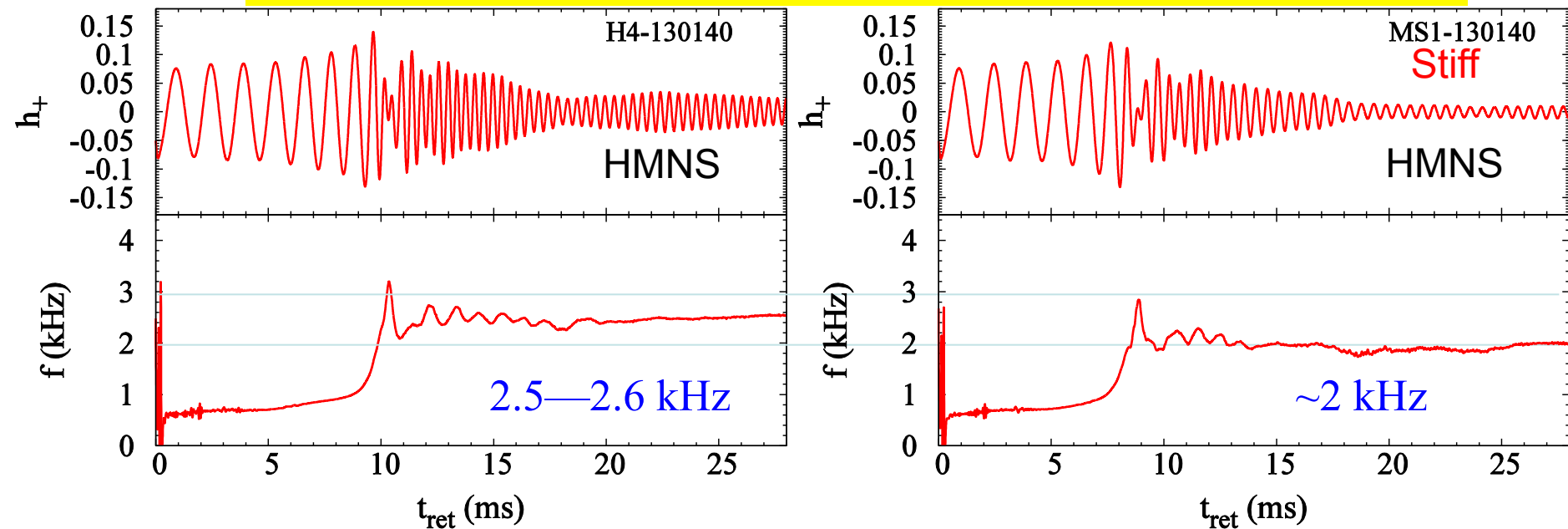


Stiff: MS1: $R=14.5\text{km}$

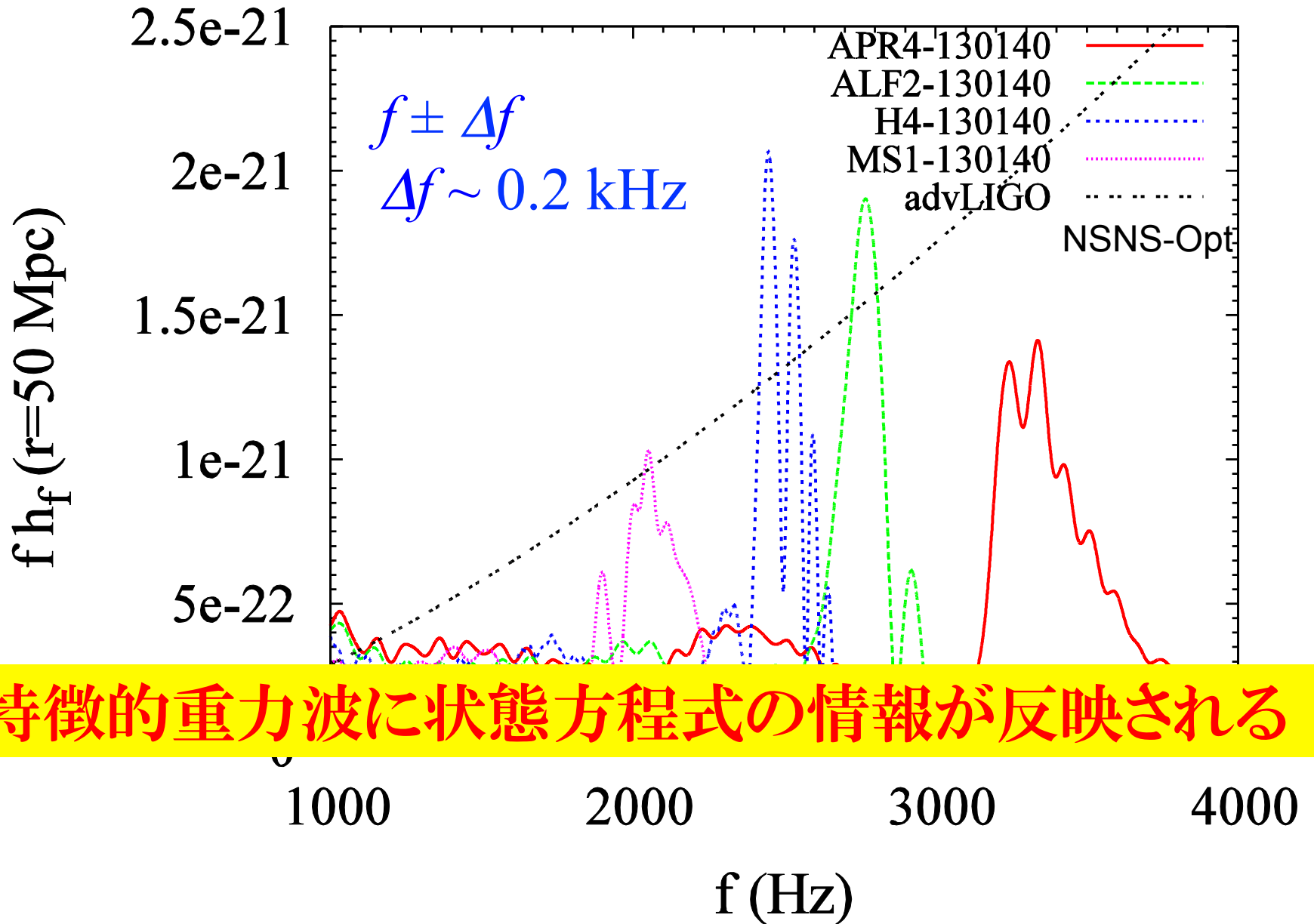
EOS dependence: $M_1=1.3, M_2=1.4M_{\text{sun}}$



特徴的周波数が状態方程式に強く依存



Fourier spectrum

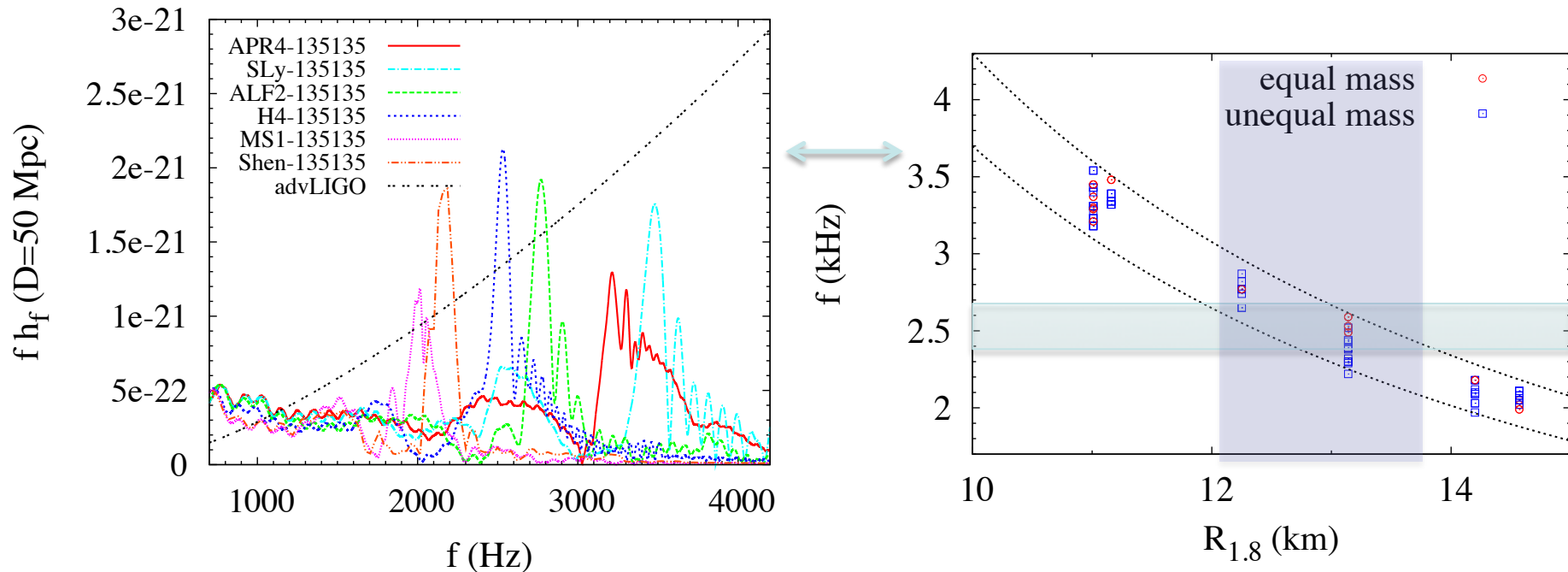


特徴的重力波に状態方程式の情報が反映される

Fourier peak & NS radius

Bauswein & Janka, PRD 86, 063001 (2012)

Hotokezaka et al, PRD 2013



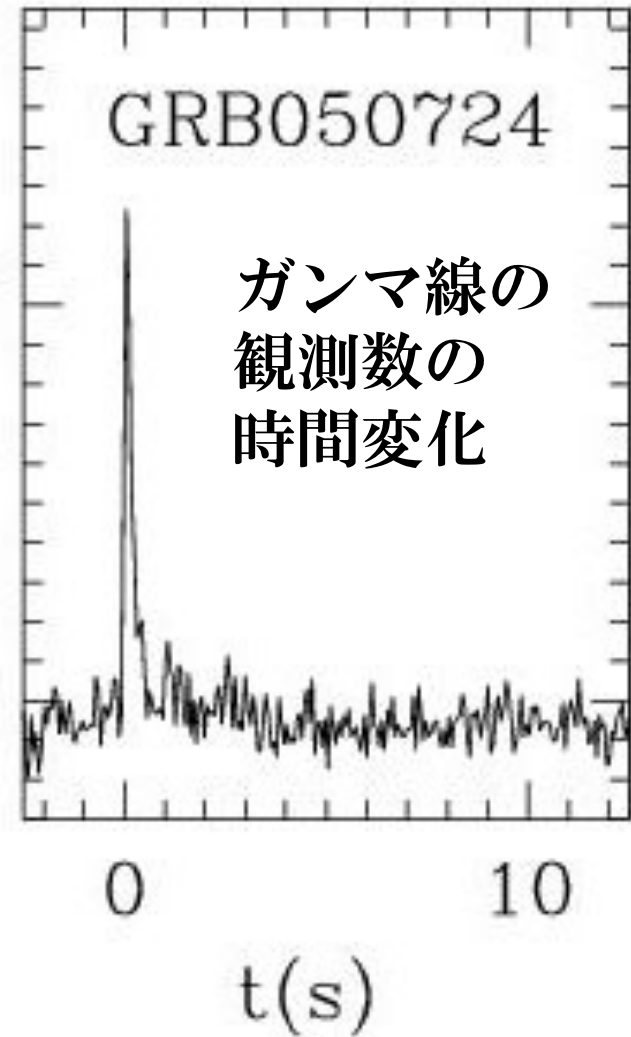
ピーク周波数が観測されれば、半径が ~ 1 km以内で制限される

課題5

継続時間の短いガンマ線 バーストの起源の解明

ガンマ線バースト

- 0.01~1000秒程度の継続時間を持つ謎の超高エネルギー爆発現象
- ガンマ線を主に放射する 2×10^4
- 放射エネルギー $\sim 10^{51}$ ergs は太陽が一生かけて放射するエネルギーに匹敵
→ 遠方で起こっても観測される
- ブラックホールの誕生と関係していそうであるが、その発生源は完全に解明されていない

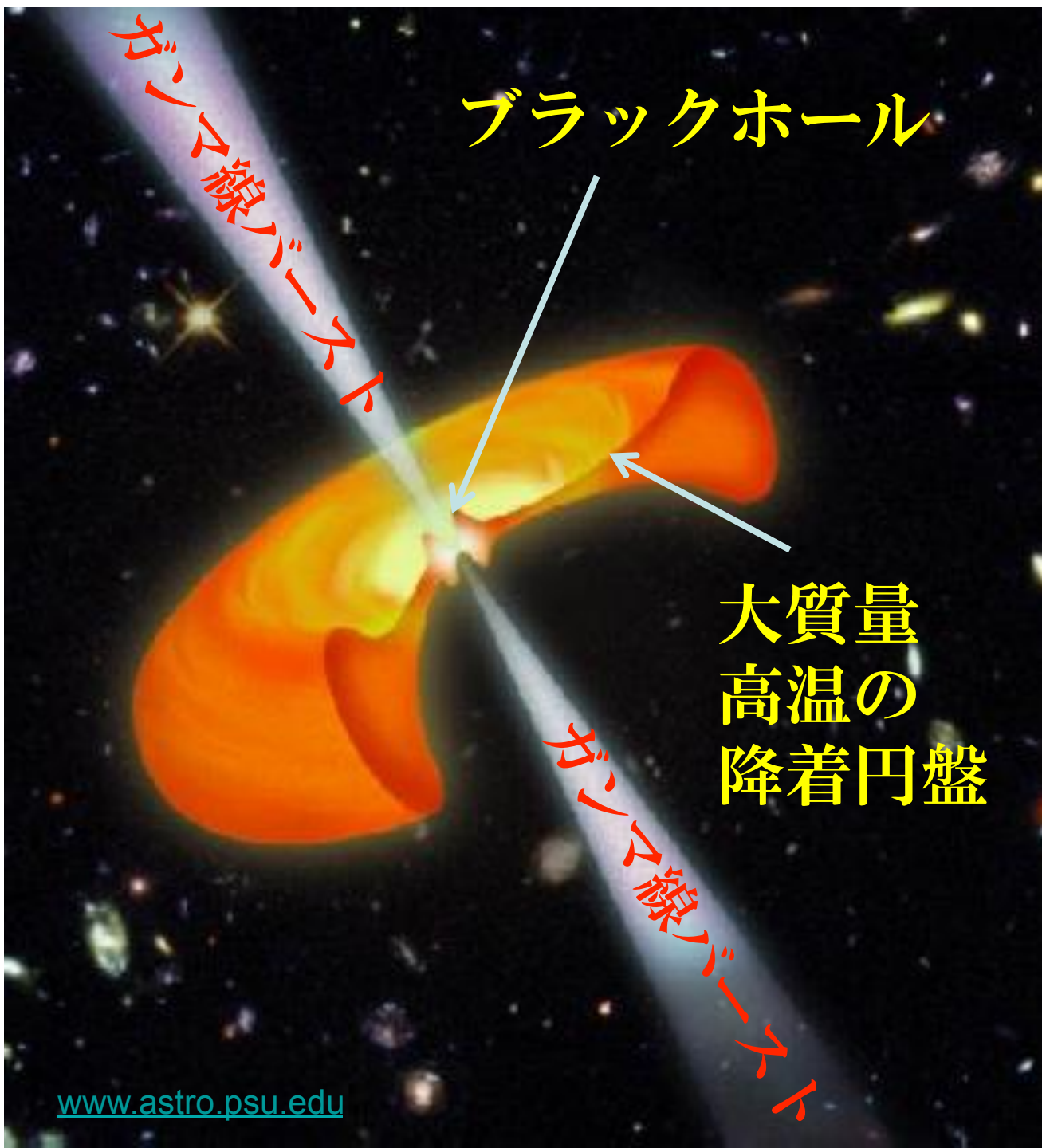


ブラックホール

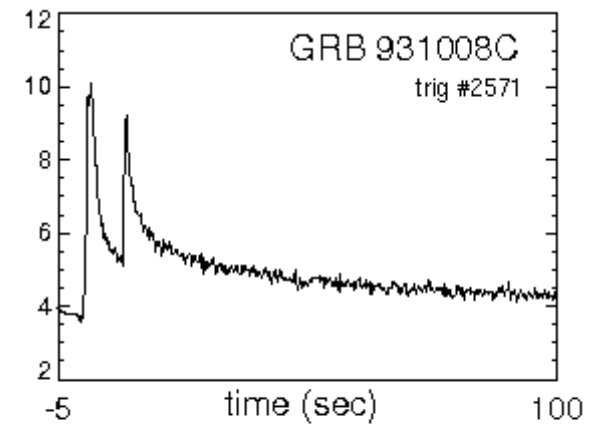
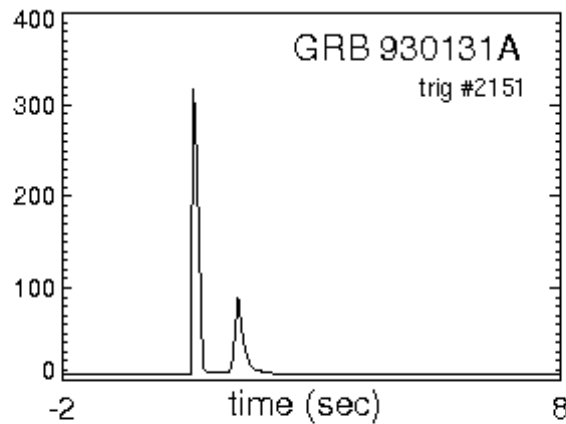
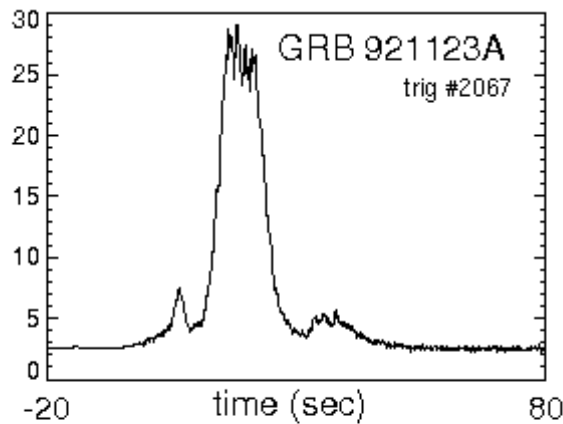
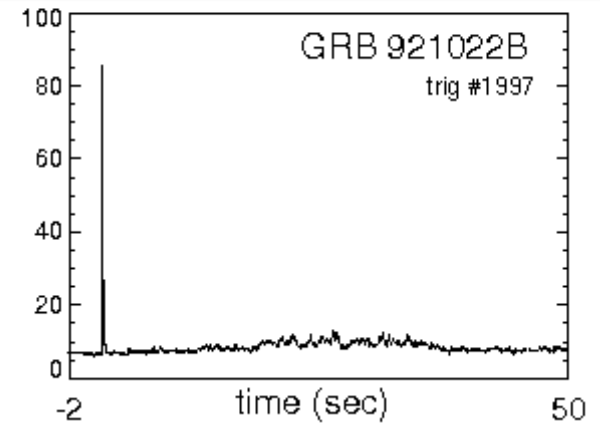
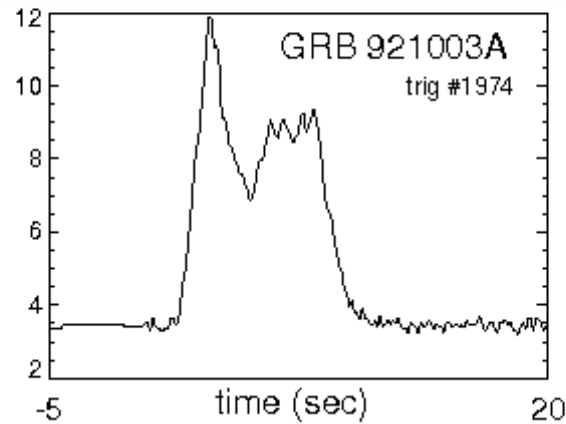
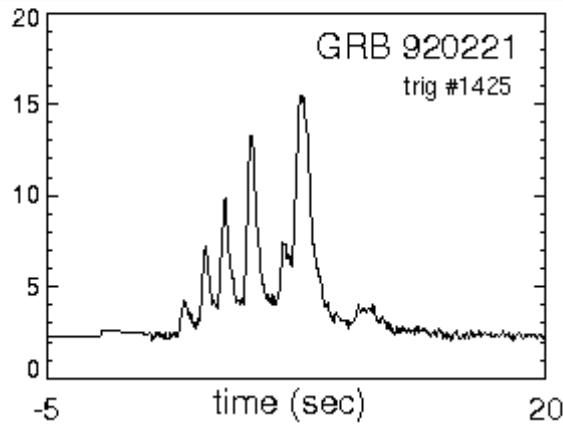
ガンマ線バースト

ガンマ線バースト

大質量
高温の
降着円盤



様々なGRBの光度曲線



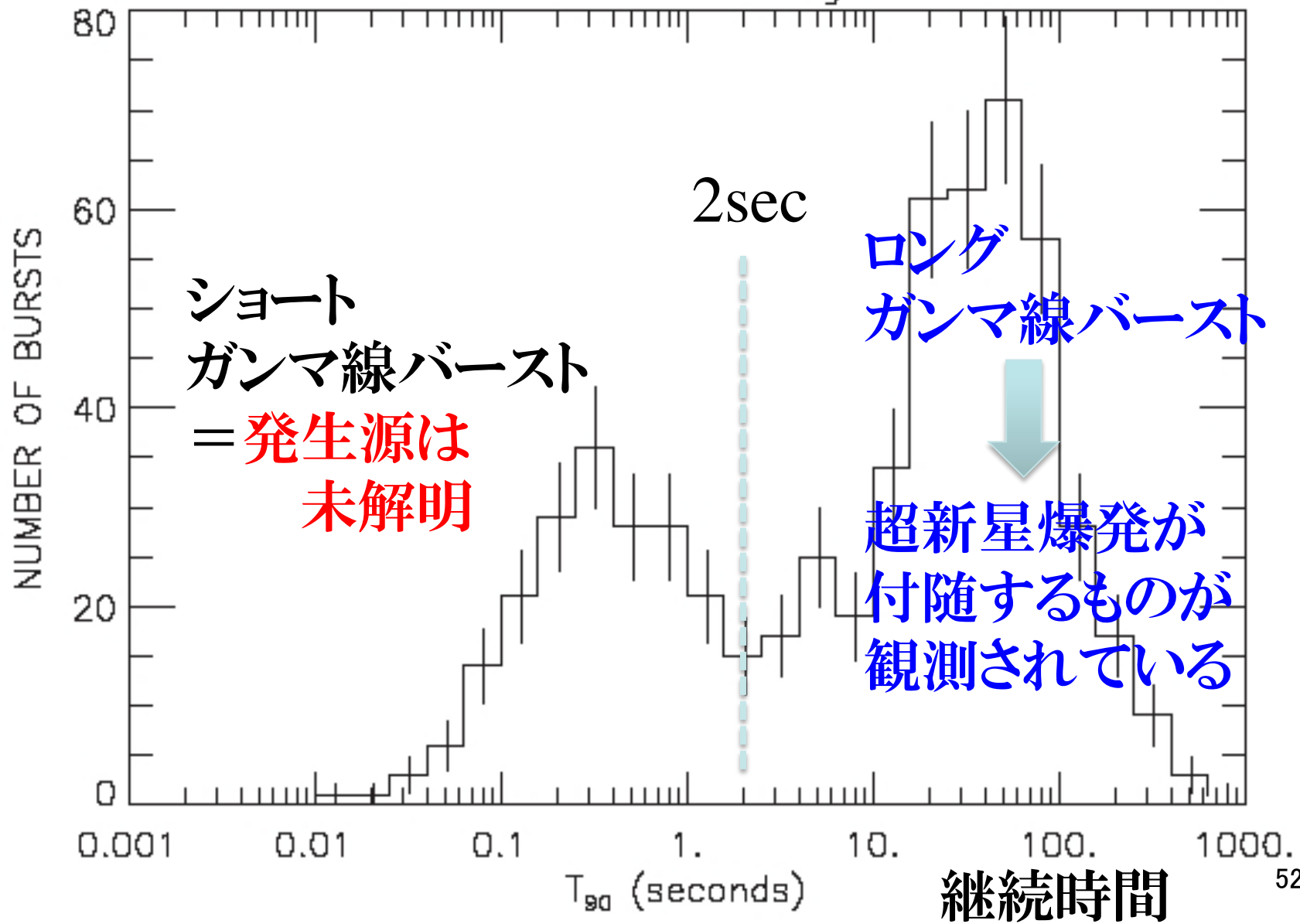
20

9E

150

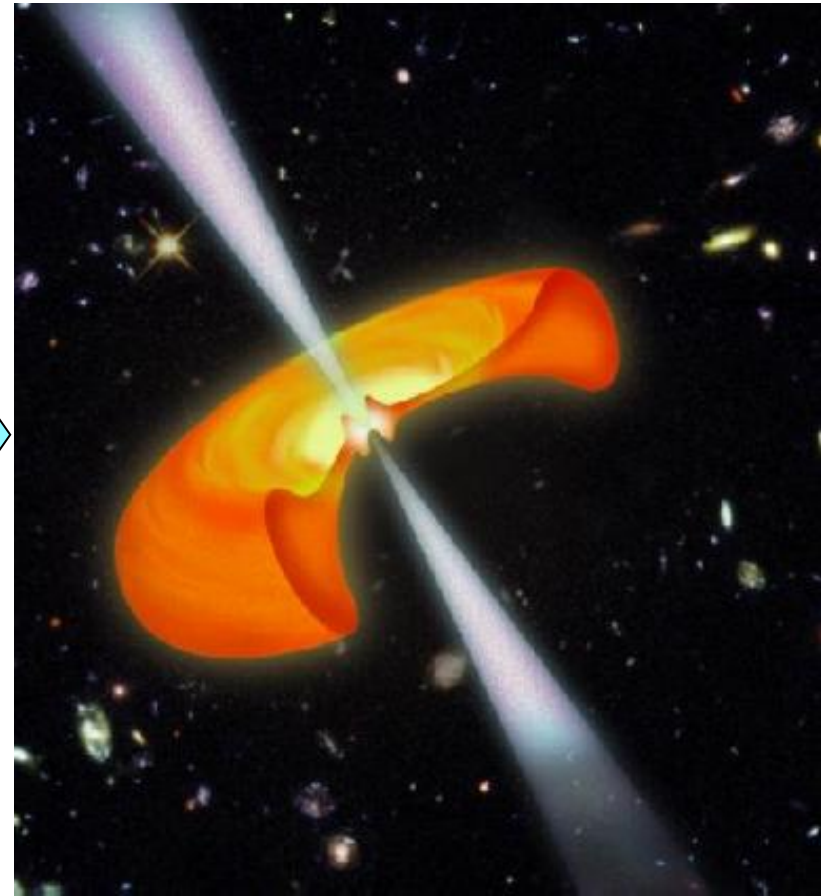
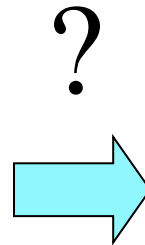
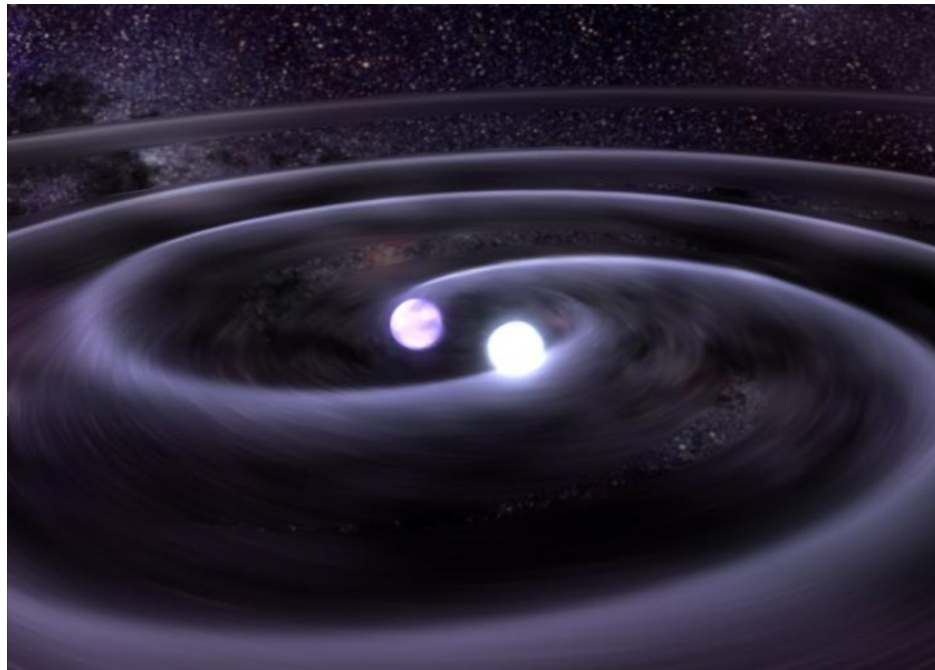
BATSE衛星観測による継続時間分布

BATSE 4B Catalog



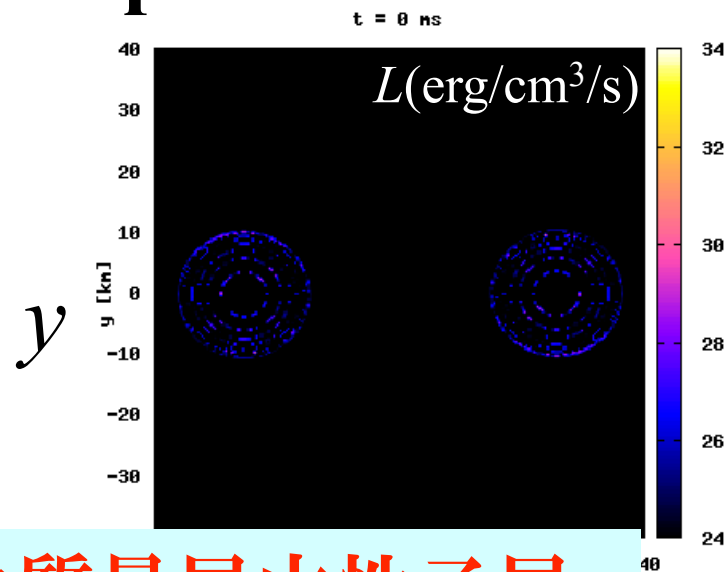
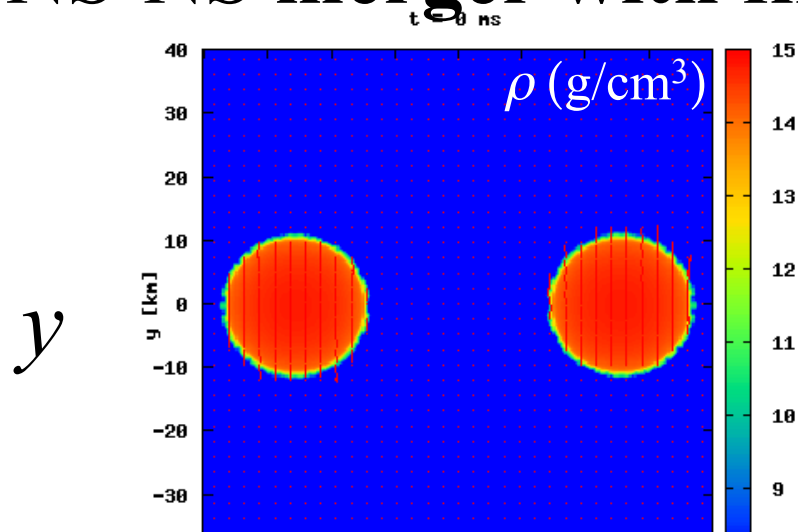
short γ -ray bursts

- Short time duration: $\Delta t < 2$ sec
- 典型的には数100ms

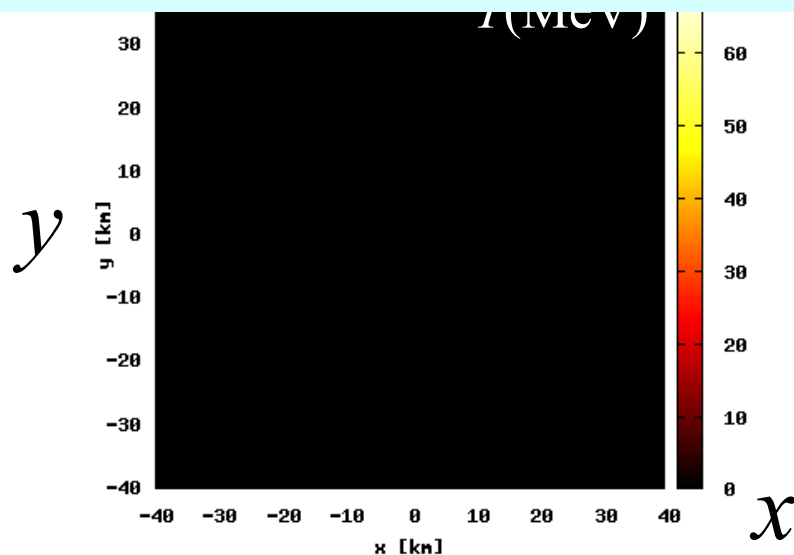


連星中性子星の合体が有望視

NS-NS merger with finite-temp EOS + neutrino

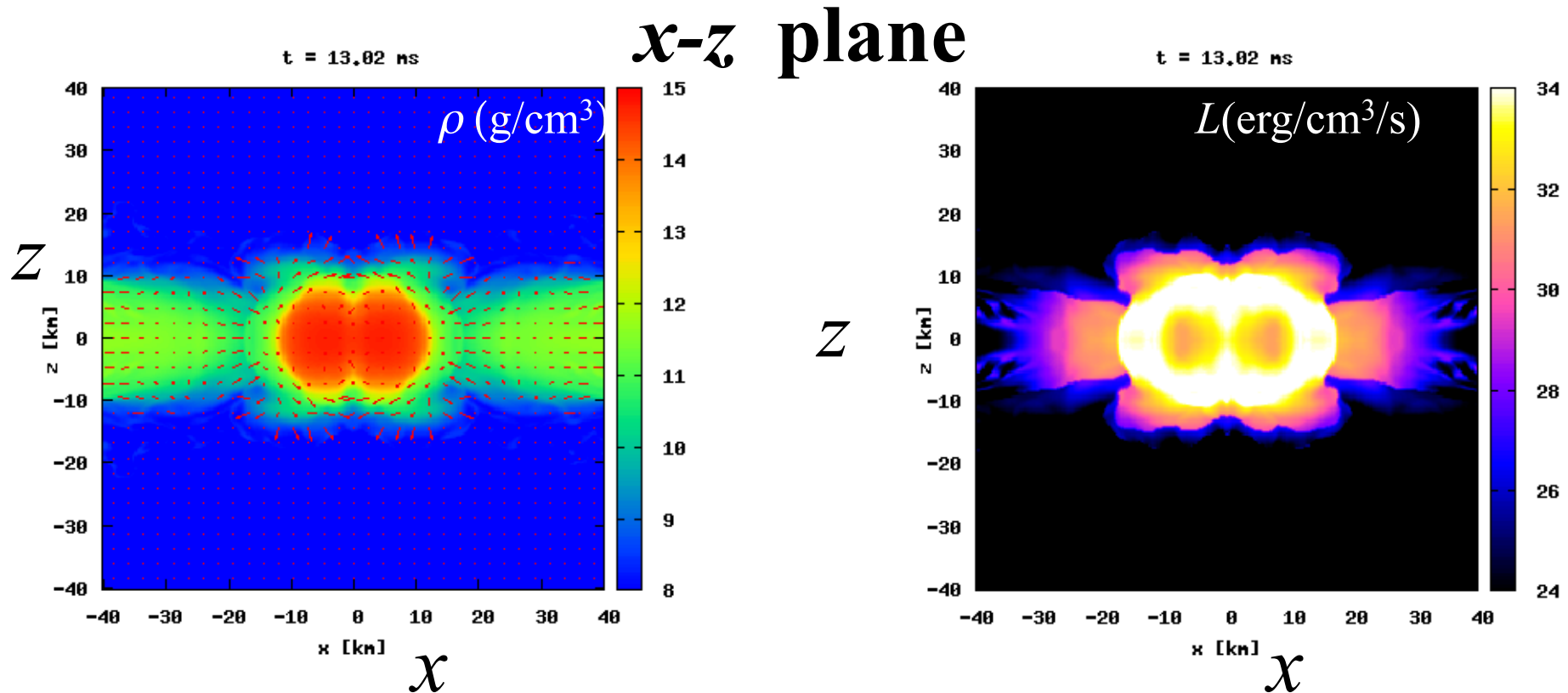


➤ 合体→衝撃波加熱→大質量星中性子星
→最終的に重力崩壊→BH+降着円盤



Shen's EOS
(stiff EOS)
 $M_{\max} = 2.2 M_{\text{sun}}$
(for $T=0$)
1.6—1.6 M_{sun}

1.6-1.6 M_{sun} case: BH + torus



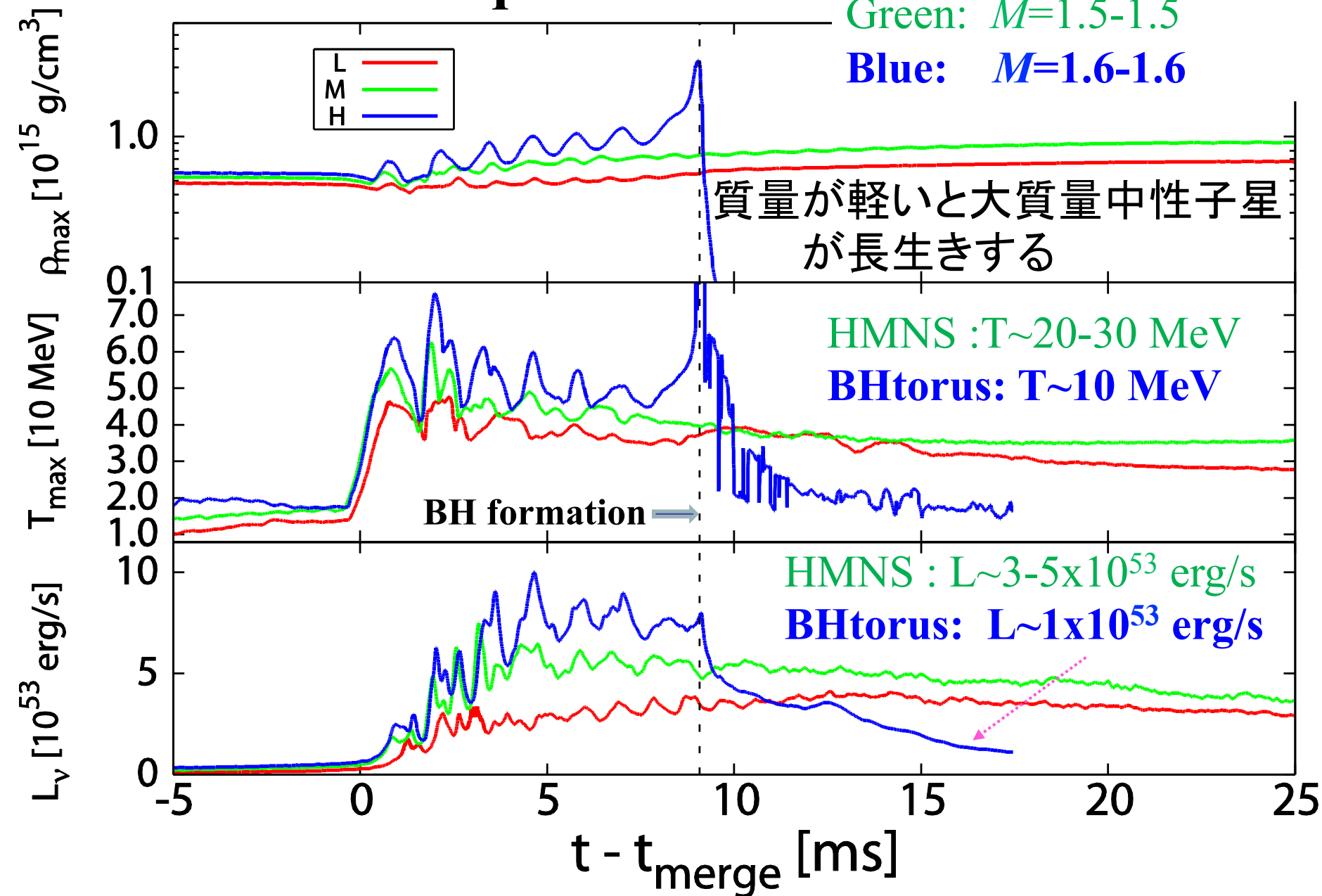
- ブラックホールスピン ~ 0.6
- 円盤から高光度のニュートリノ放射

Related quantities

Red: $M=1.35-1.35 M_{\text{sun}}$

Green: $M=1.5-1.5$

Blue: $M=1.6-1.6$



Neutrino pair annihilation



Jet collides with ambient medium (external shock wave)

Colliding shells emit low-energy gamma rays (internal shock wave)

High-energy gamma rays

X-rays

Visible light

Radio

Faster shell

Slower shell

Low-energy gamma rays

Black hole engine

Prompt emission

Afterglow

Annihilation rate (Beloborodov '08)

$$\begin{aligned}\frac{dE_{\nu\bar{\nu}}}{dt} &\sim \frac{\sigma_0}{2\pi\theta_{\text{Opening}}^2 r c} (E_\nu + E_{\bar{\nu}}) \dot{E}_\nu \dot{E}_{\bar{\nu}} \left(\frac{1}{m_e c^2}\right)^2 \cos^2 \Theta_{\text{collision}} \\ &\sim \underline{10^{51} \text{ ergs/s}} \left(\frac{10^7 \text{ cm}}{r}\right) \left(\frac{0.1 \text{ rad}}{\theta_{\text{opening}}}\right)^2 \left(\frac{E_\nu + E_{\bar{\nu}}}{10 \text{ MeV}}\right) \\ &\quad \times \left(\frac{\dot{E}_\nu}{10^{53} \text{ ergs/s}}\right) \left(\frac{\dot{E}_{\bar{\nu}}}{10^{53} \text{ ergs/s}}\right) \left(\frac{\cos^2 \Theta_{\text{collision}}}{0.1}\right)\end{aligned}$$

ブラックホールと降着円盤の系は大量のニュートリノを放射し、さらにガンマ線を大量に生成しそうである

→ 今後、数値相対論で示す必要あり

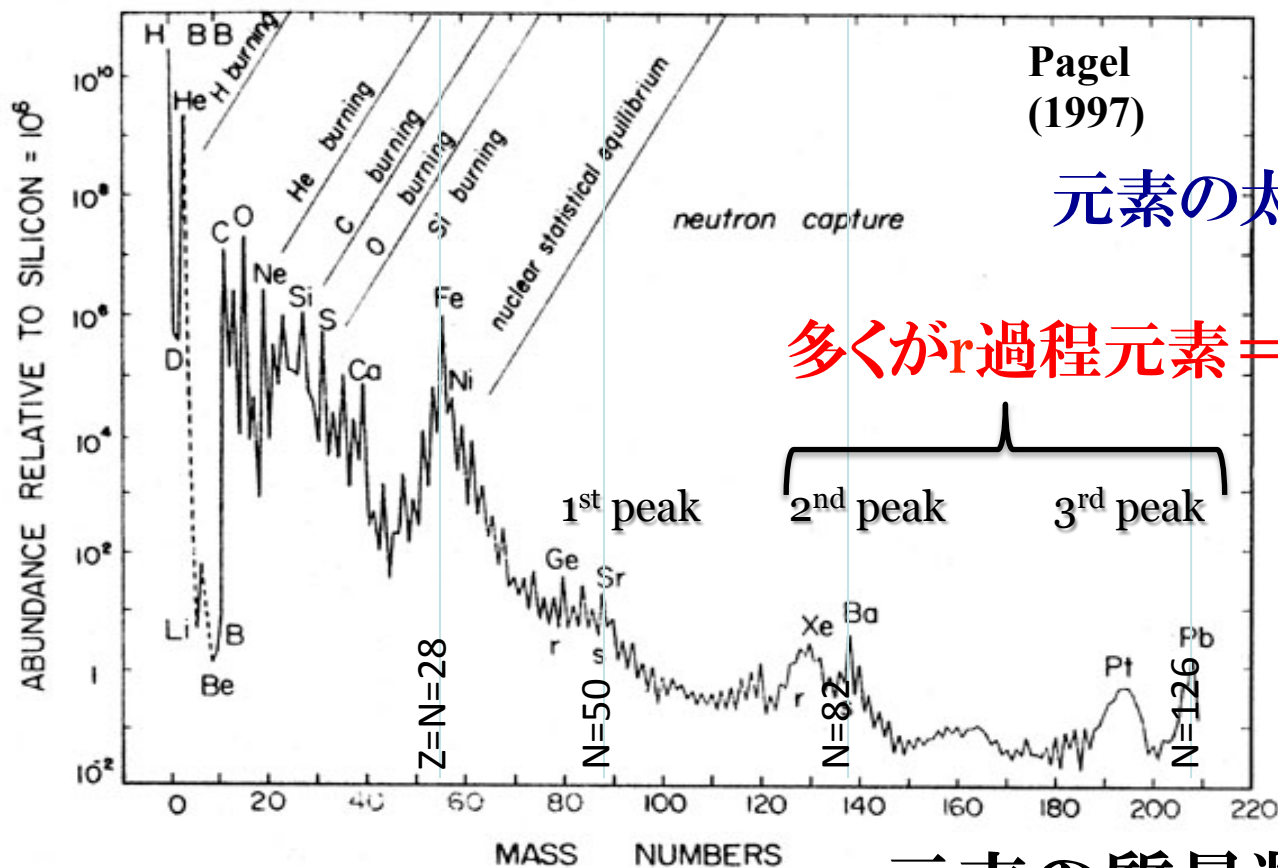
課題6

金、銀、プラチナの起源 の解明

金やプラチナはどうやって生成されたのか

- 未解明の大問題
- これが重力波観測に関連している。

組成比

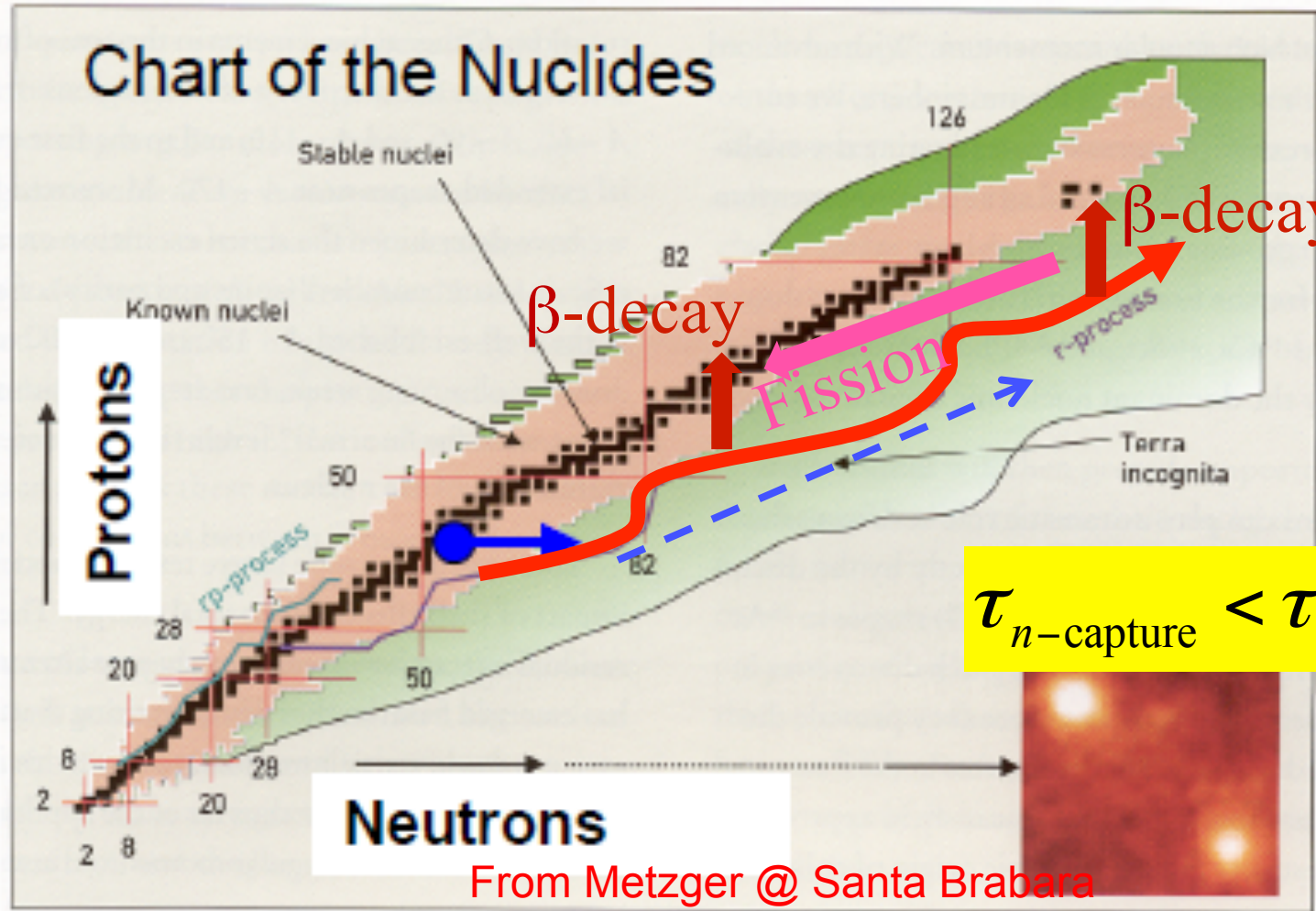


元素の太陽系組成

多くがr過程元素 = 起源は未解明

元素の質量数

r過程は、中性子過剰な状況で、ベータ崩壊よりも中性子捕獲が速く進むと起きる → 中性子星近傍の爆発現象
 候補1: 超新星爆発時 → 超重元素の合成が難しい
 候補2: 中性子星連星の合体



From Metzger @ Santa Brabara

中性子星連星の合体と質量放出：重要

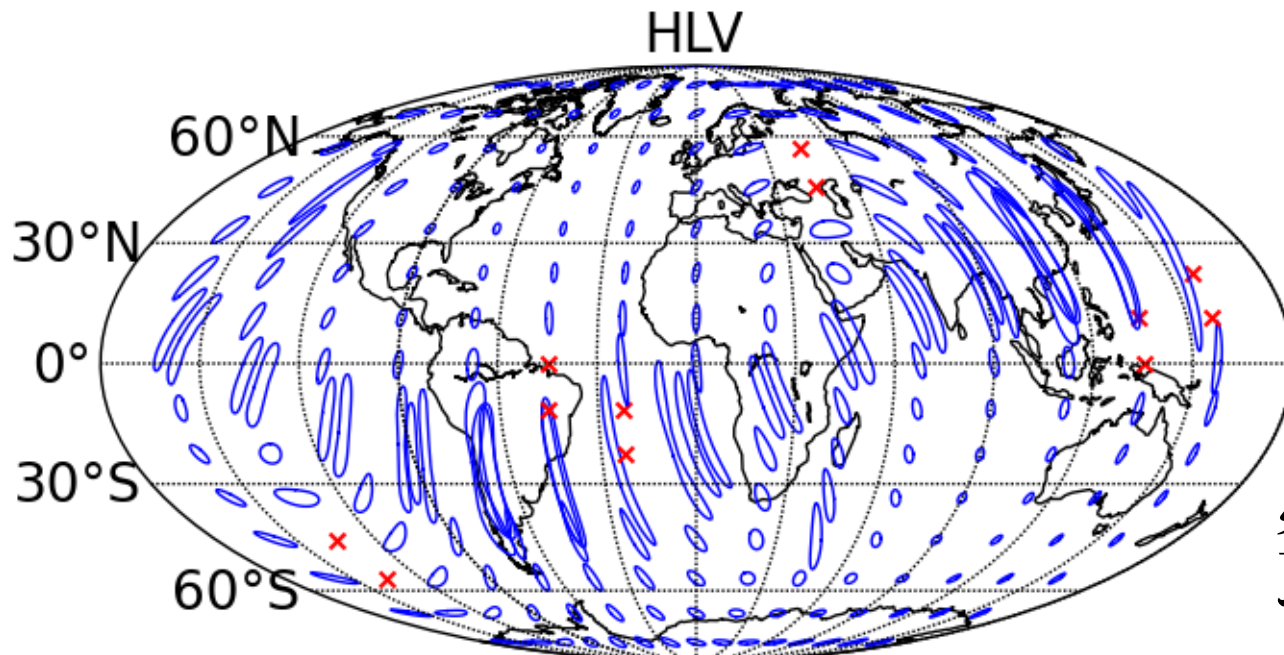
➤ 理由1： 合体時に重力波が放射されるのに引き続き電磁波を放射する

→ 観測出来れば、対応天体現象となり、重力波の放射を裏付ける。

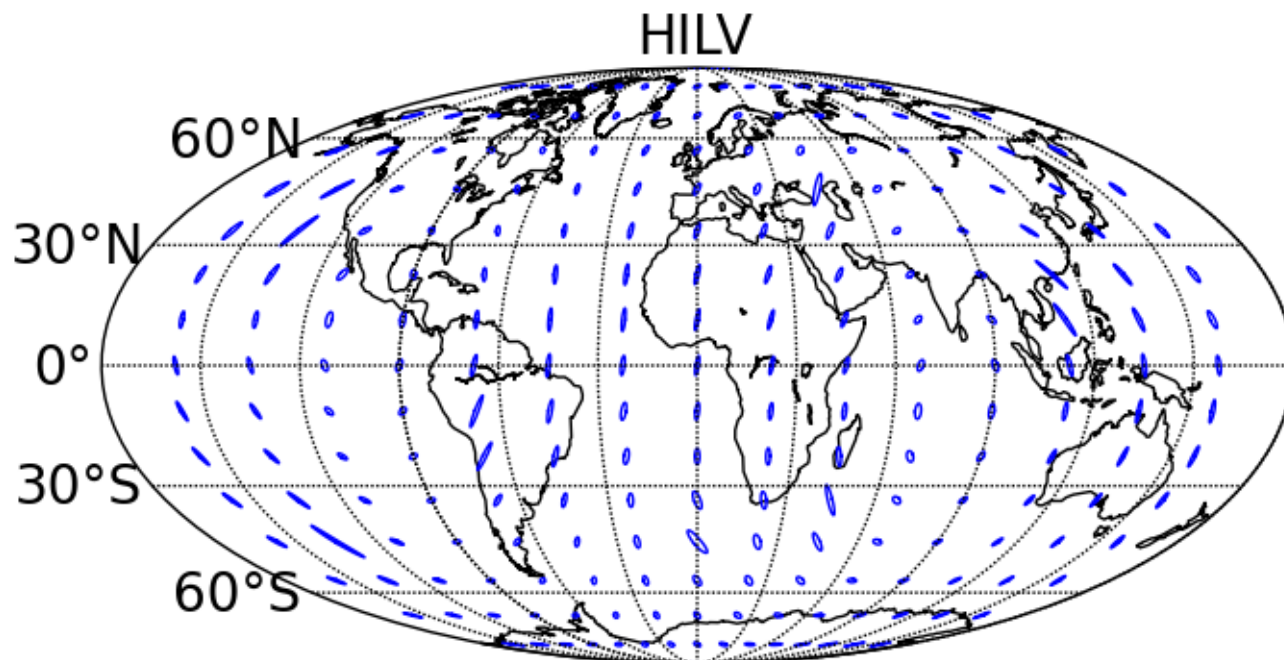
また重力波検出だけでは、重力波源の方向を特定するのは難しいが、対応電磁波を観測出来れば、方向や発生した銀河が決定可能に。

➤ 理由2： r過程重元素を生成する。

Localization



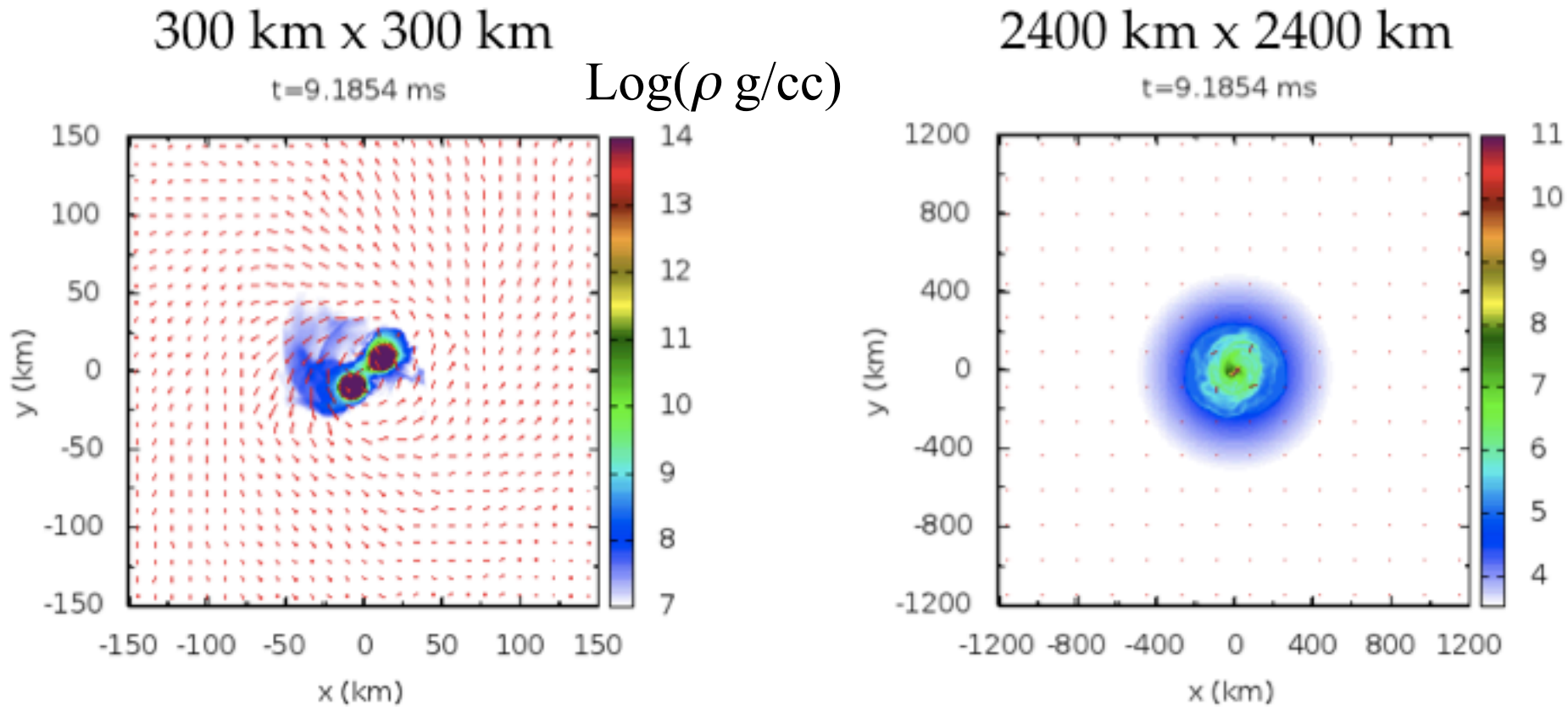
空間解像度は
せいぜい (10度)²



電磁波観測が
できれば、
空間解像度は
< (1秒)²

Mass ejection at merger

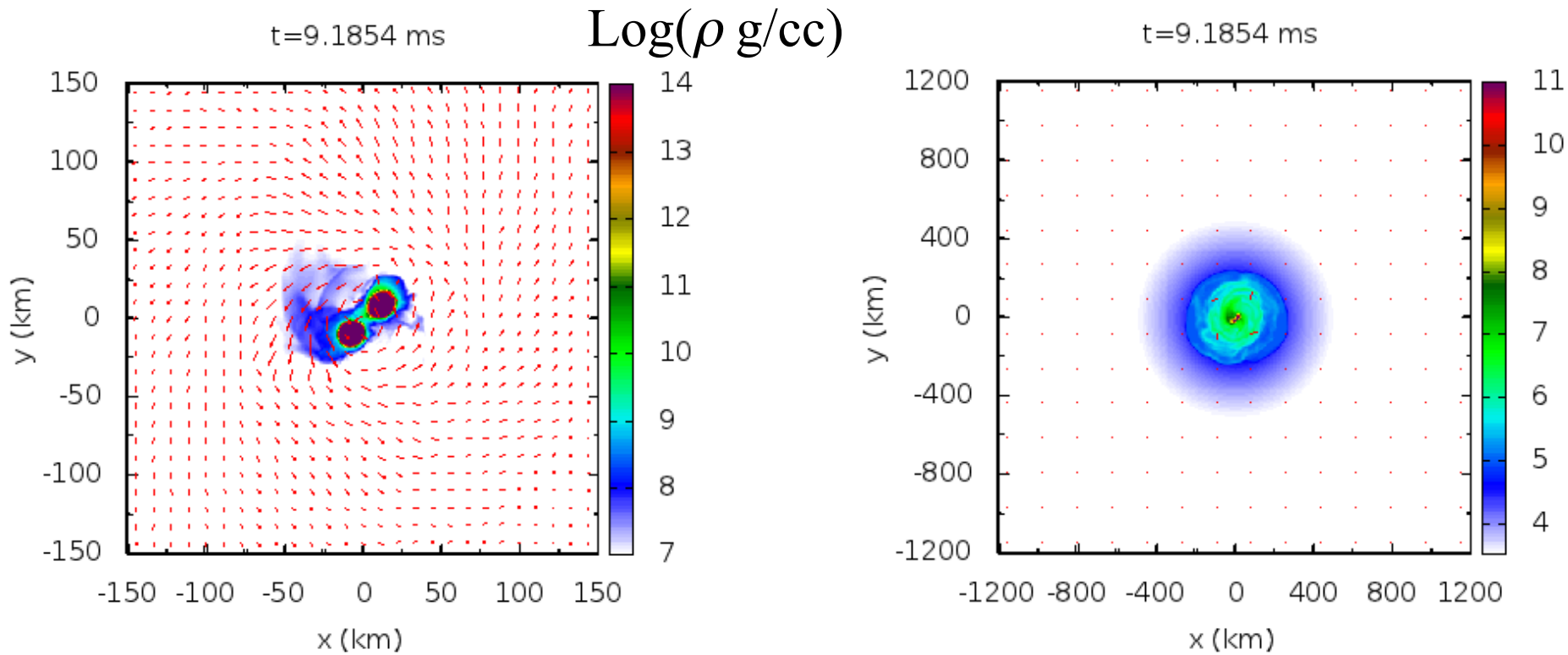
Model : $1.2M_{\text{sun}} - 1.5M_{\text{sun}}$, EOS=APR4, $R \sim 11$ km



Hotokezaka et al. 2013

Mass ejection at merger

Model : $1.2M_{\text{sun}} - 1.5M_{\text{sun}}$, EOS=APR4, $R \sim 11$ km



Ejecta mass $\sim 0.01M_{\text{sun}}$, $v \sim 0.2c$ in average

Mass ejection on the meridian plane

(x-z plane)

Model : $1.2M_{\text{sun}} - 1.5M_{\text{sun}}$, EOS=APR4, $R \sim 11$ km

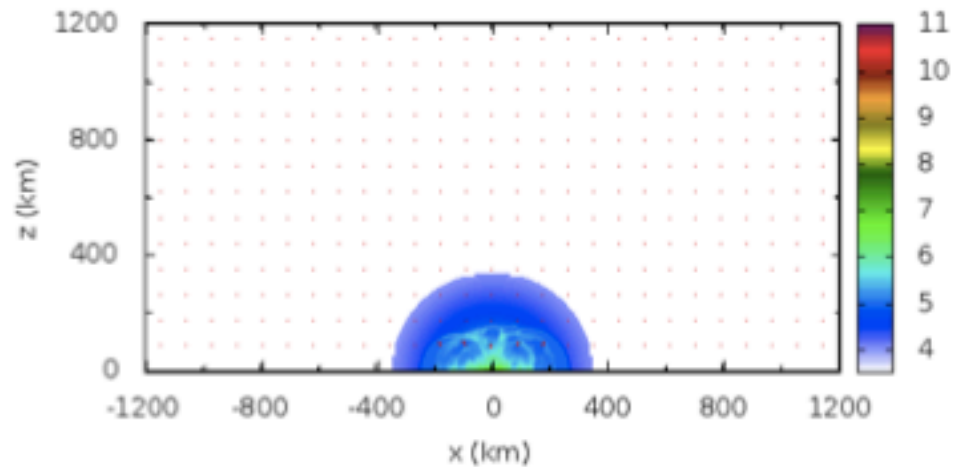
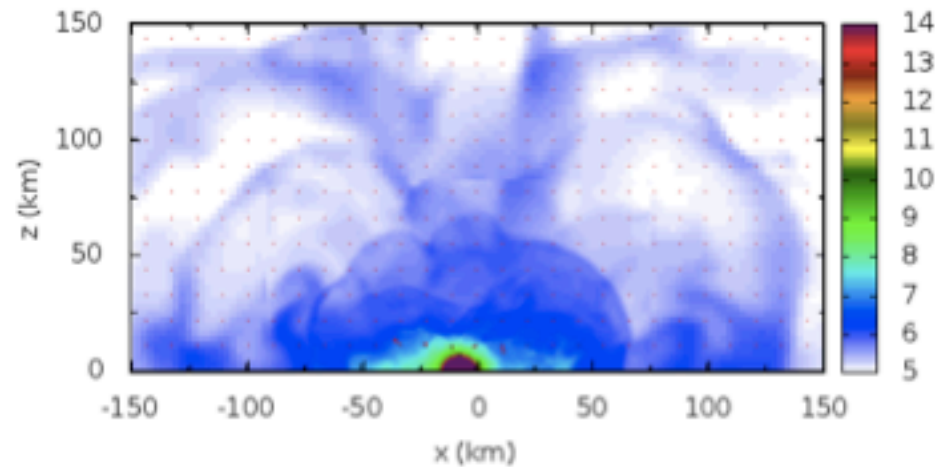
300 km x 150 km

2400 km x 1200 km

Log(ρ g/cc)

t=9.1854 ms

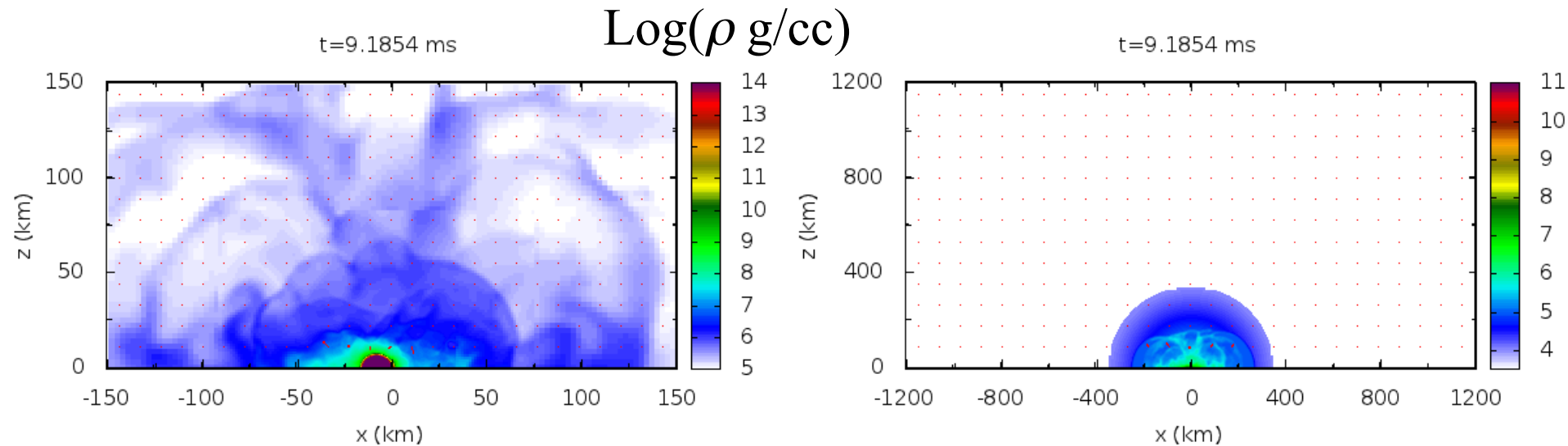
t=9.1854 ms



Mass ejection on the meridian plane

(x-z plane)

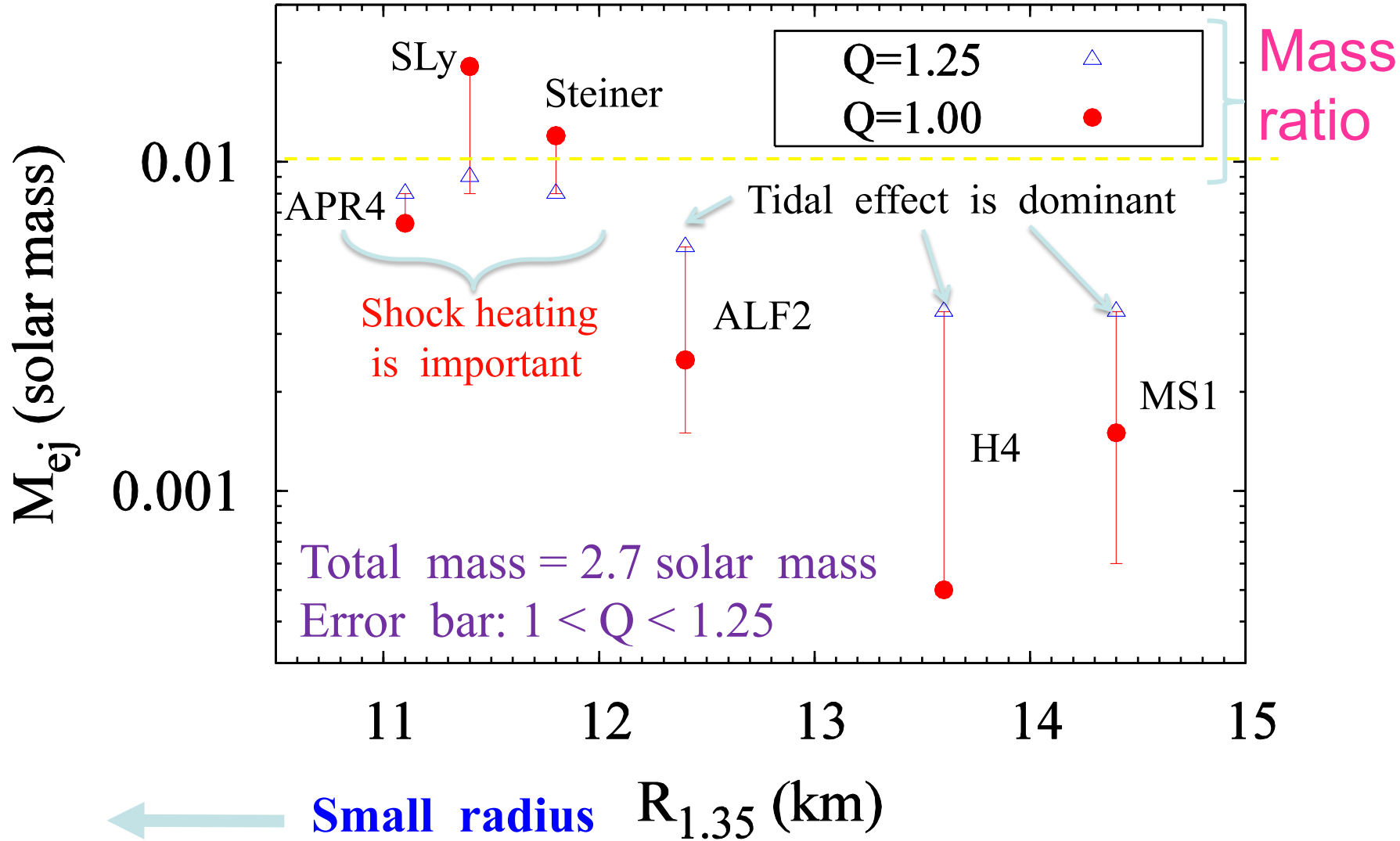
Model : $1.2M_{\text{sun}} - 1.5M_{\text{sun}}$, EOS=APR4, $R \sim 11$ km



**Ejecta is quasi-spherical:
Shock heating plays a key role.**

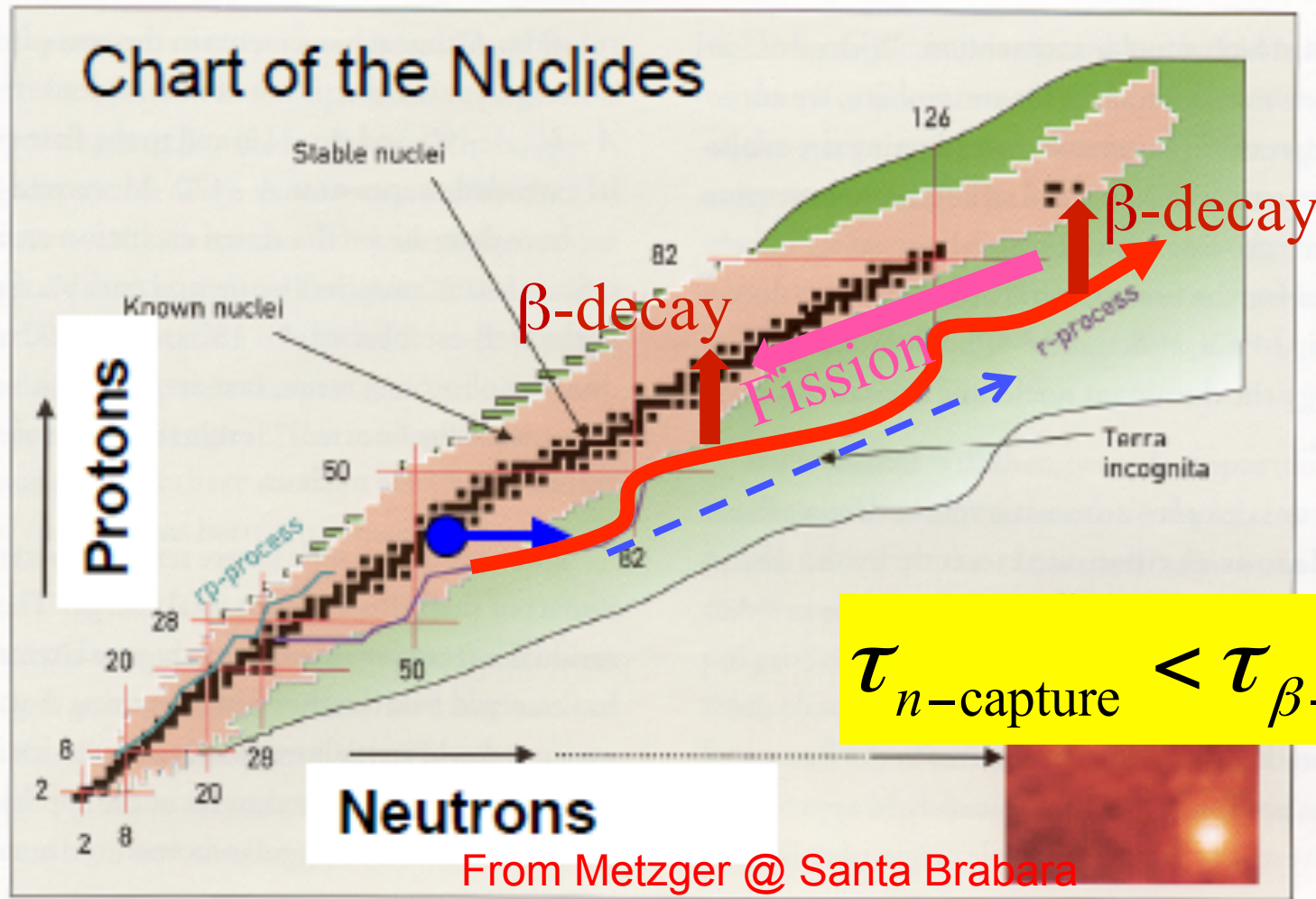
Amount of ejection depends strongly on EOS

(Relatively) Soft EOS is favored



どうやって光るのか？

- 不安定重元素の合成 → β -decay/fission
→ 放出物質の加熱 → UV ~ IR (Li-Paczynski '98)



Estimate by Li-Paczynski (ApJ, 1998)

Maximum Luminosity @ $R/v = R^2 \rho \kappa / c$:

$$L_{\max} \sim 4 \times 10^{41} \text{ ergs/s} \left(\frac{M}{0.01 M_{\odot}} \right)^{1/2} \left(\frac{v}{0.2c} \right)^{1/2} \\ \times \left(\frac{\kappa}{10 \text{ cm}^2 / \text{g}} \right)^{-1/2} \left(\frac{f_{\text{r-proc}}}{3 \times 10^{-6}} \right)$$

参考：太陽光度
 $3.9 \times 10^{33} \text{ ergs/s}$

$$\text{at } t \sim 5 \text{ days} \left(\frac{M}{0.01 M_{\odot}} \right)^{1/2} \left(\frac{v}{0.2c} \right)^{-1/2} \left(\frac{\kappa}{10 \text{ cm}^2 / \text{g}} \right)^{1/2}$$

$$3 \times 10^{41} \text{ ergs/s} \Leftrightarrow M = -15.0 \text{ mag} \Rightarrow m = 21.5 \text{ mag @ 200Mpc}$$

観測可能

2.7 M_{sun} NS-NS Merger and remnant

*Radioactively
powered
EM signals*



GRB Observer

γ ray ?

R-process
 β decay

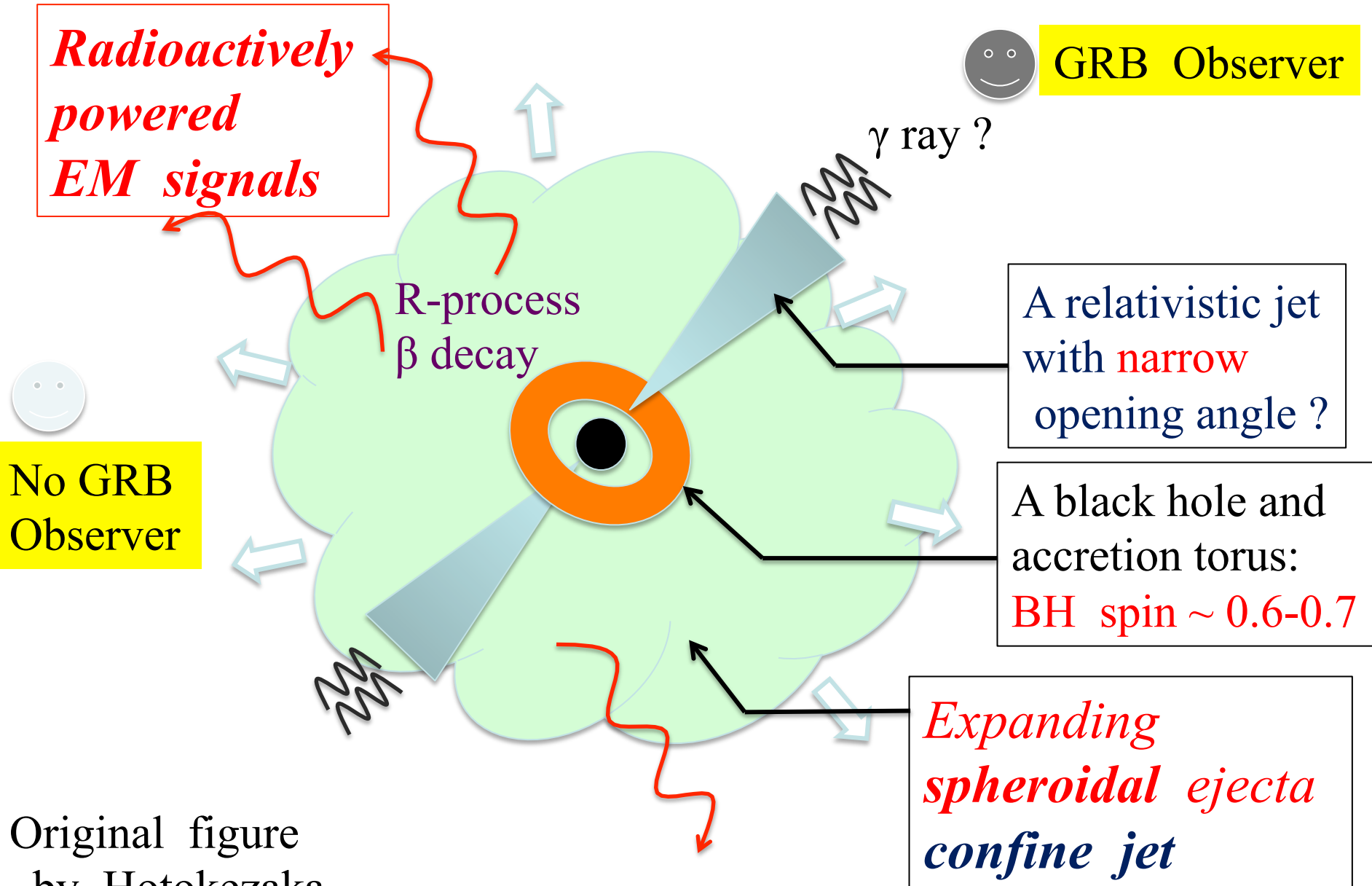
A relativistic jet
with **narrow**
opening angle ?

No GRB
Observer

A black hole and
accretion torus:
BH spin $\sim 0.6-0.7$

*Expanding
spheroidal ejecta
confine jet*

Original figure
by Hotokezaka



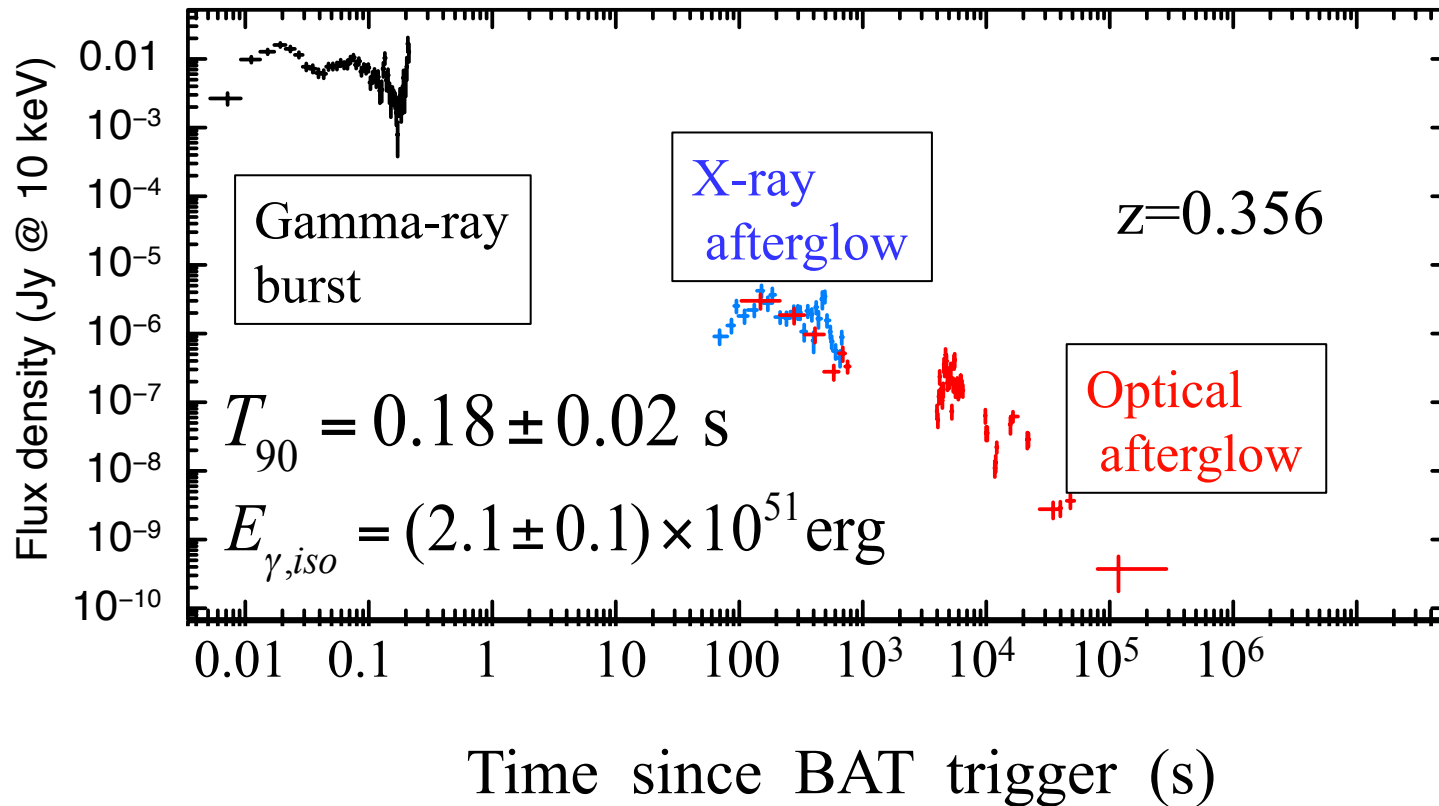
Implication of short-GRB 130603B

Observation of short-GRB130603B: Swift BAT/XRT

http://www.swift.ac.uk/burst_analyser/00557310/

BAT-XRT data of GRB 130603B

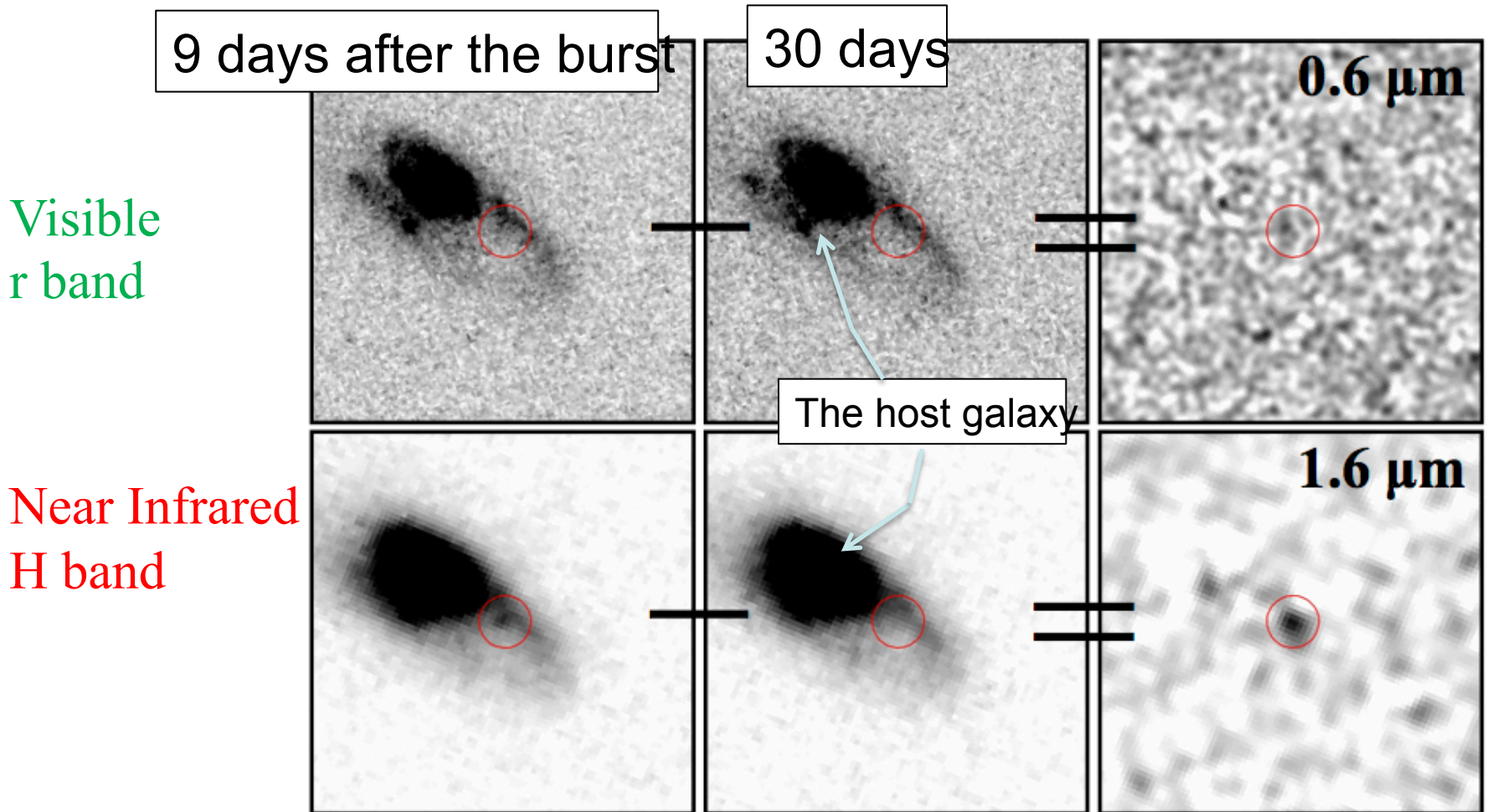
BAT: Black -- XRT: WT: Blue; PC: Red



Kilonova/macronova with GRB 130603B ?

◆ Hubble Space Telescope imaging by follow-up observation

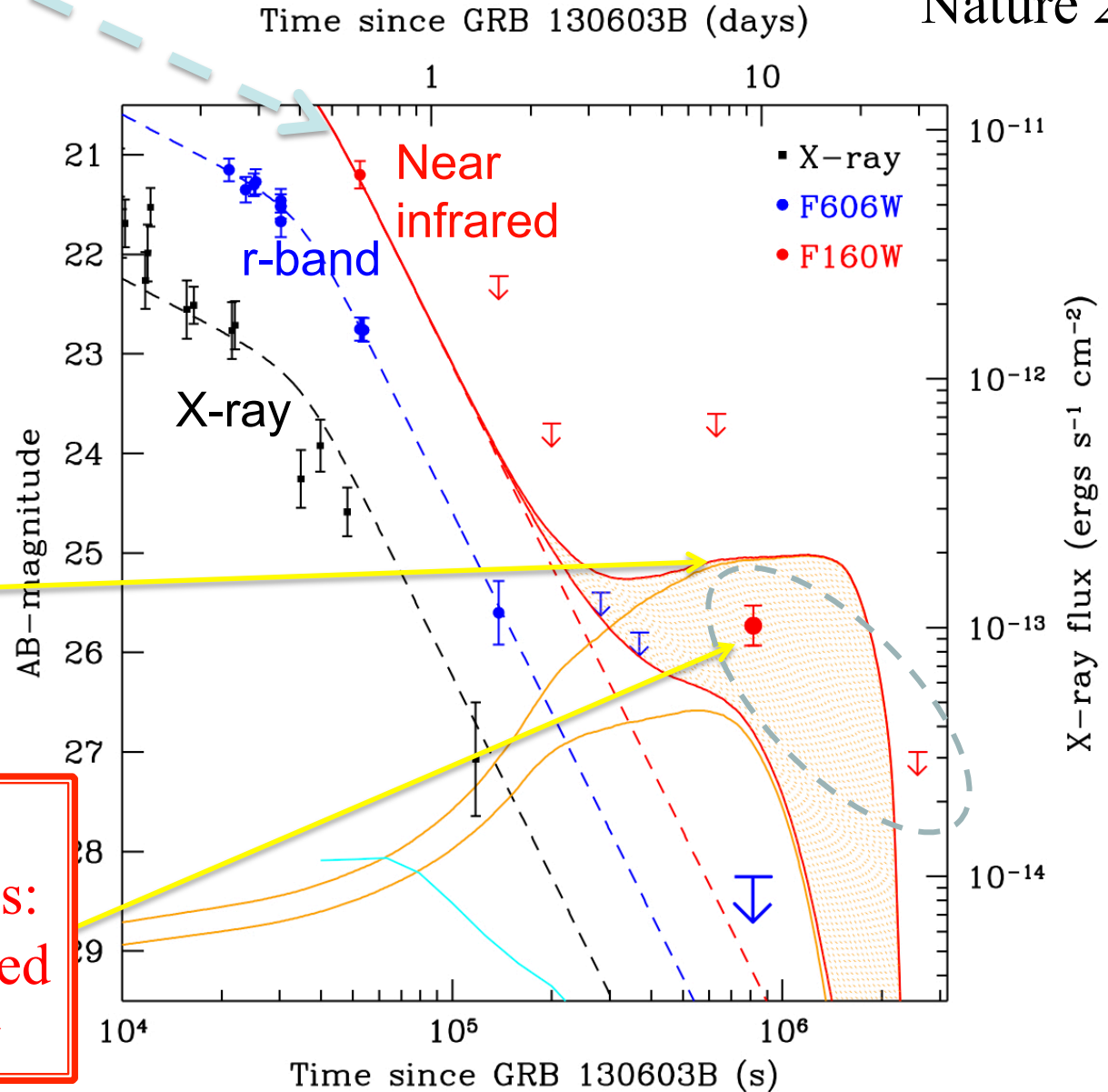
Tanvir et al., 2013
Berger et al., 2013



Straight lines
are models of
GRB afterglow

Observed data

Tanvir et al.
Nature 2013

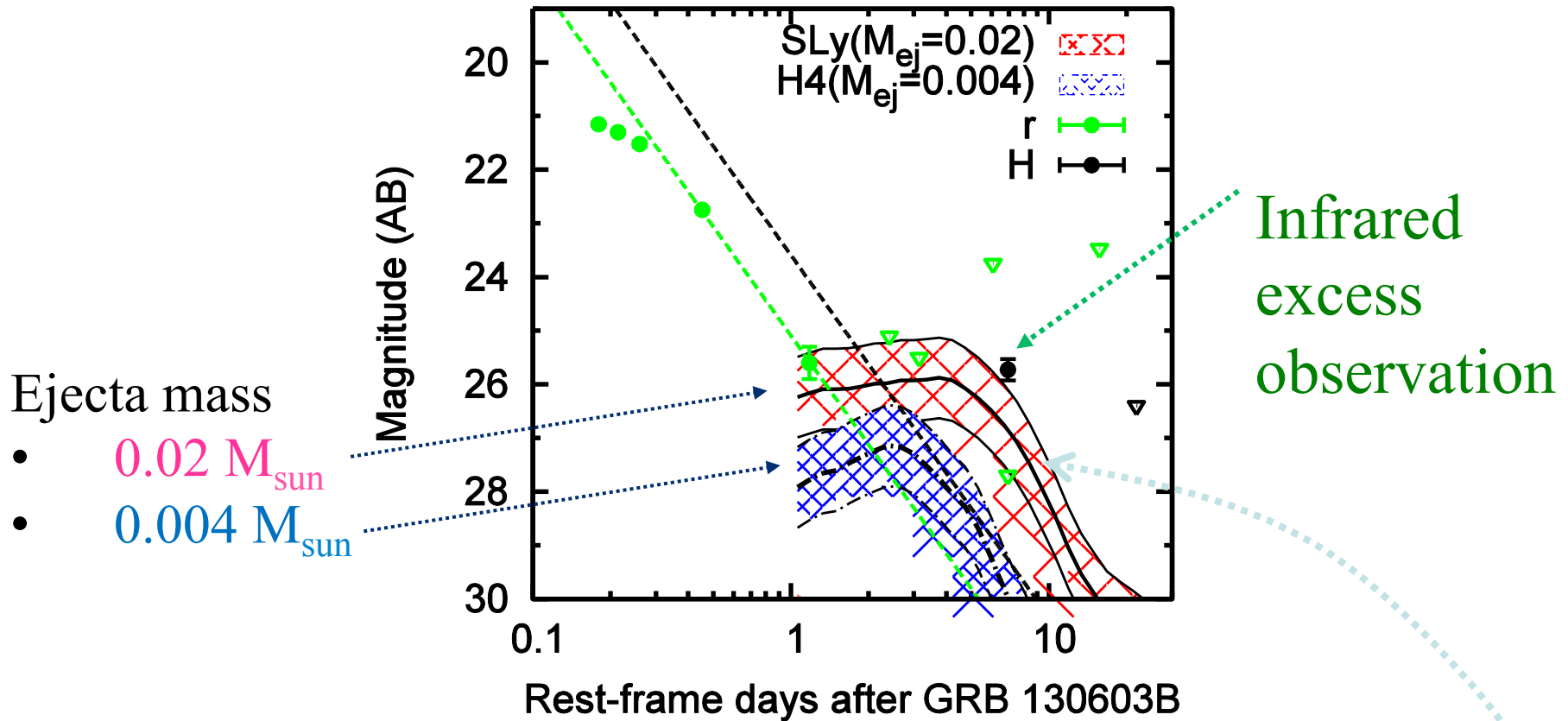


Approximate
kilo/macronova
models

This bump is an
evidence of excess:
Cannot be explained
by GRB afterglow

Progenitor models of GRB130603B: NS-NS case

GR+radiation transfer work by Hotokezaka +, ApJL778, 2013



➤ コンパクトな中性子星でかつ加熱率が高めなら
連星中性子星の合体で観測結果が説明出来る

Heating rate has uncertainty of factor of ~ 2

数年経つと

「重力波を検出して満足するつもりだったが、それだけではなく
元素合成の大問題が解決した」
となるかもしれない。

これが宇宙物理学の醍醐味

課題7

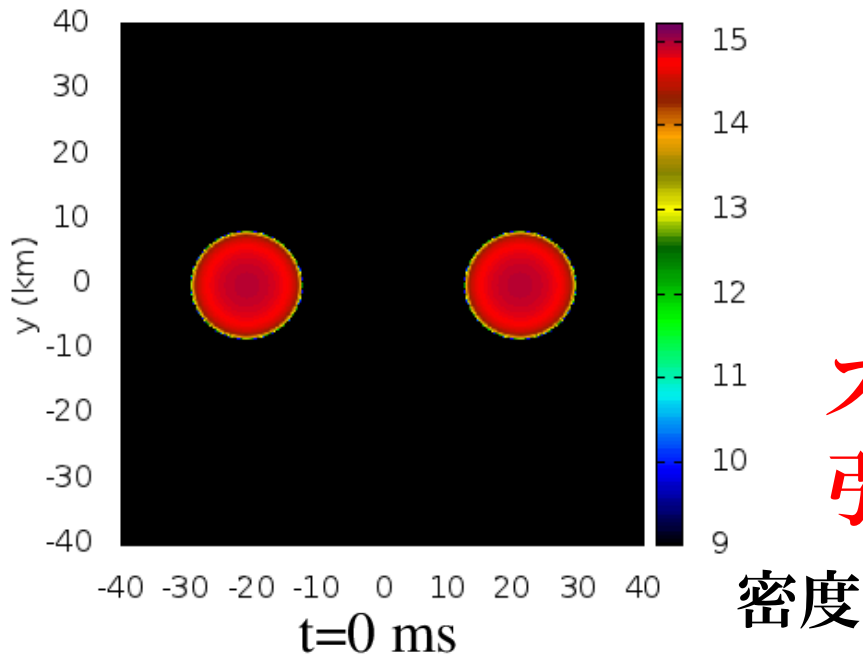
一般相対論はどこまで 正しいのか

重力理論の探求

- 一般相対論は非常に成功した古典重力理論
- 今のところ綻びは見つかっていない
- ただし強重力場でテストされたことがない
- 量子重力理論は別に存在するはず
 - 超強重力場で一般相対論は破れるだろう
- 重力波を用いてテスト
- そのためには、一般相対論とは異なる重力理論に対して数値新重力論が必要

計量理論な重力波は存在する

t=0 ms



上：一般相対論

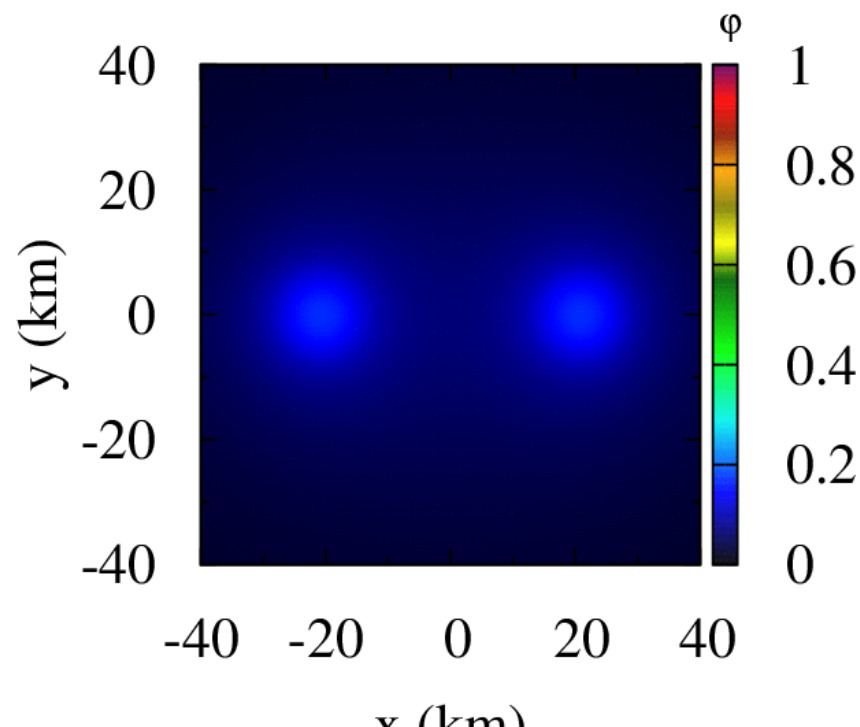
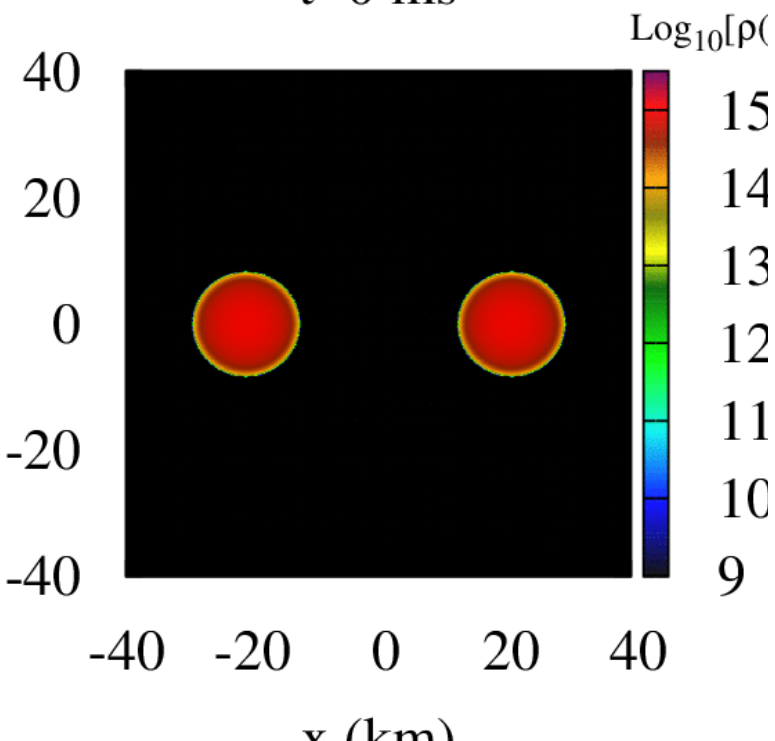
下：スカラーテンソル理論

スカラー場が励起され、
引力が増し合体が速まる
スカラー場

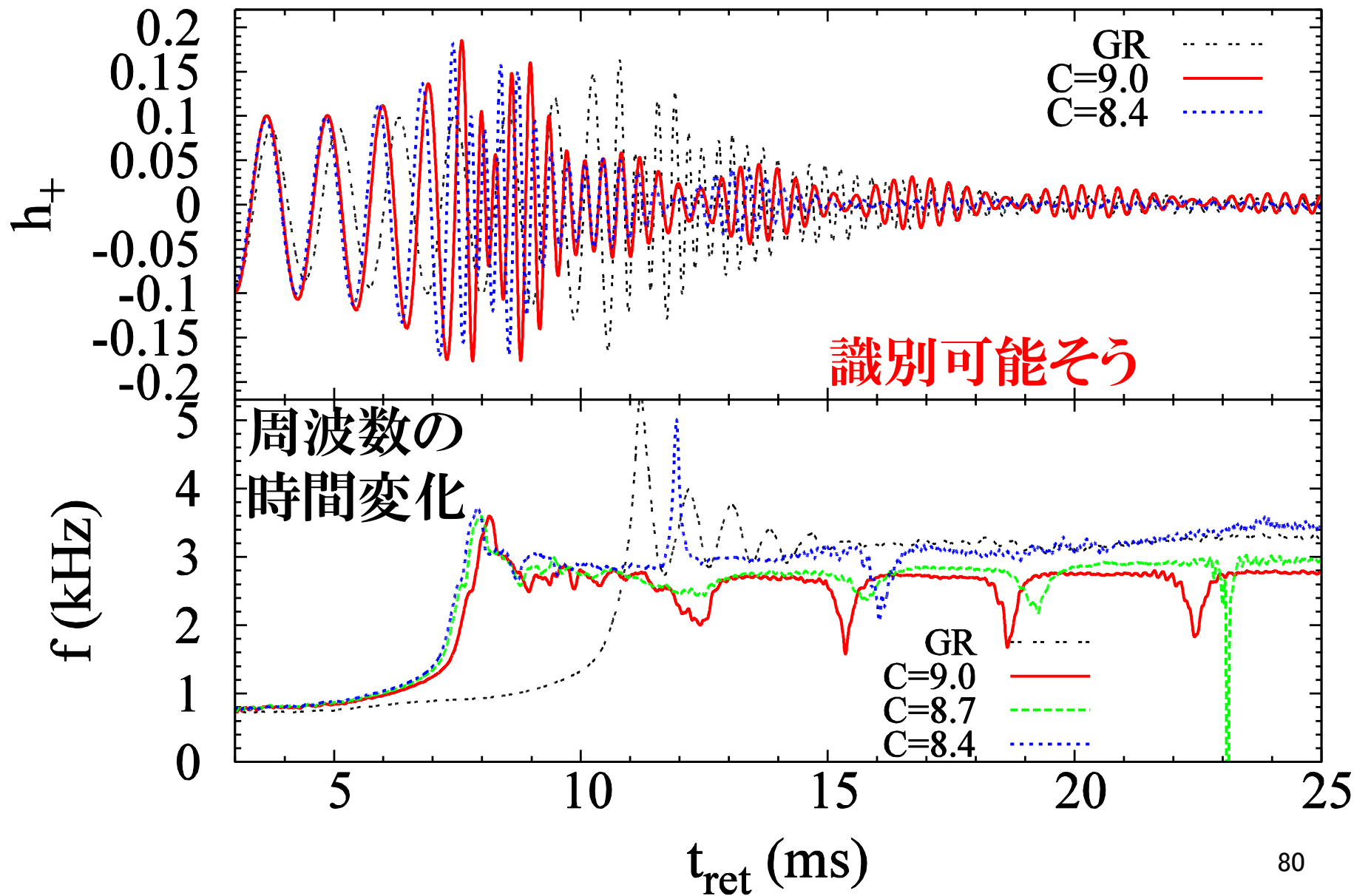
t=0 ms

密度

t=.0459 ms



重力波の波形



まとめ

未解決問題の解決に、
重力波観測や数値相対論
は大いに寄与するだろう。

おしまい

1 GW source detectors

LIGO: 2015 ~



KAGRA: 2017 ~



VIRGO: 2016 ~

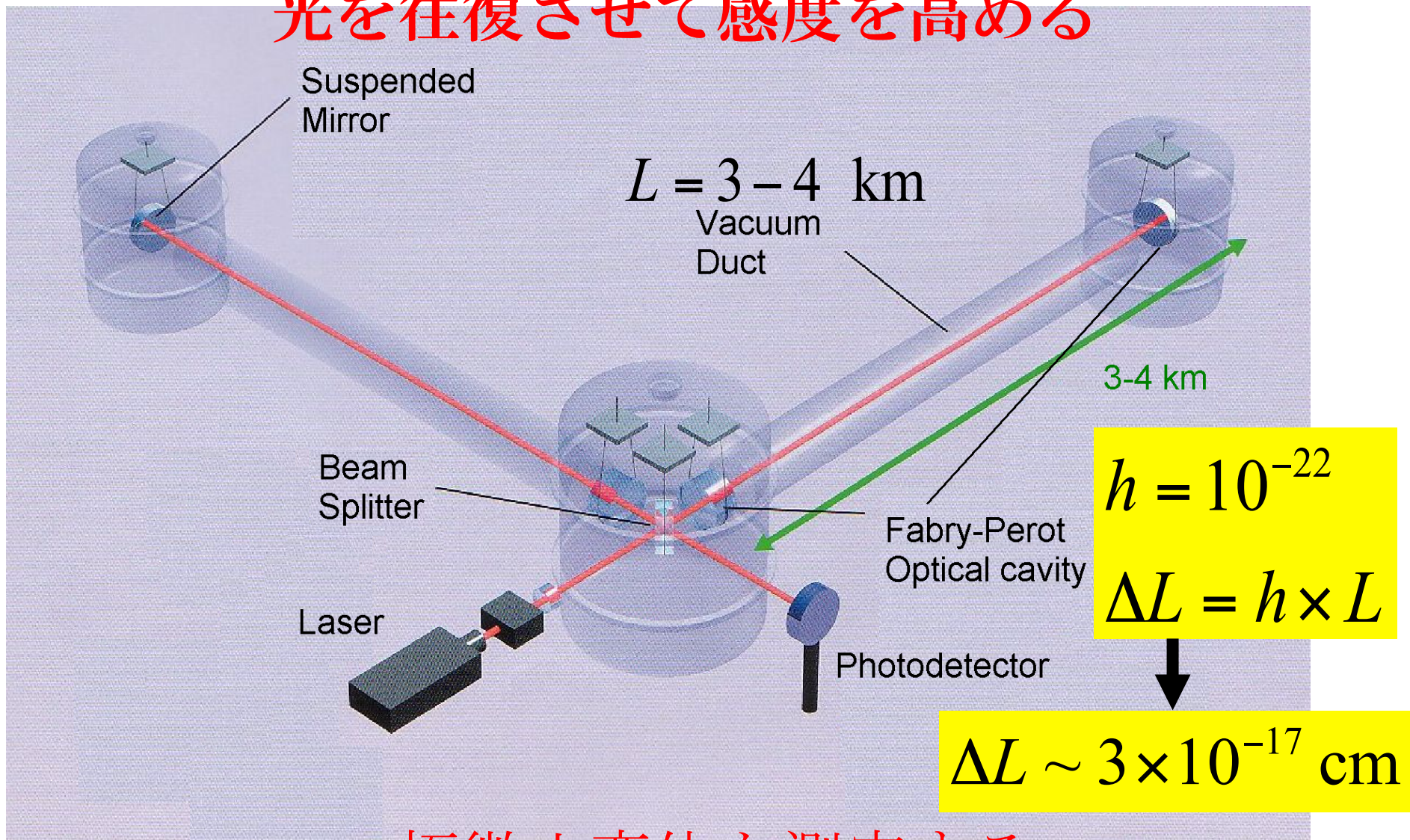


GEO600



Fabry-Perot Michelson laser-interferometer

光を往復させて感度を高める



極微小変位を測定する

Design Sensitivity of adv LIGO

