

---

# 重力波データ解析手法

~データが出てから見つけるまで~

---

神田展行 (大阪市立大学)

4/18/2014



# 講義要諦

---

- 重力波検出器は、重力波の信号をデータに残す
- 重力波検出器は、検出器の雑音もデータに残す。

データには、信号と雑音が同時に記録されている。

雑音の中から、信号を特定(identify)しなければならない。

→マッチドフィルター法

- 時系列(time series)と周波数領域(frequency domain)

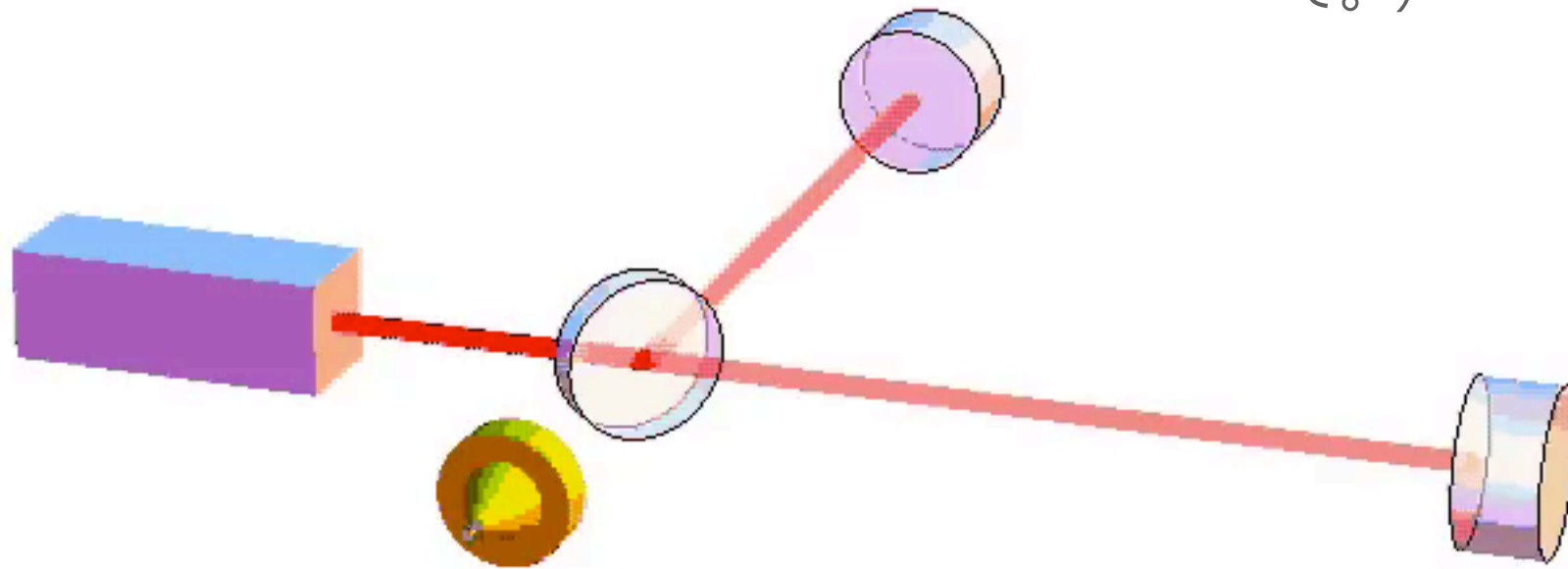
周波数スペクトル、パワースペクトル密度

- 重力波の特徴的な波形（コンパクト連星合体）



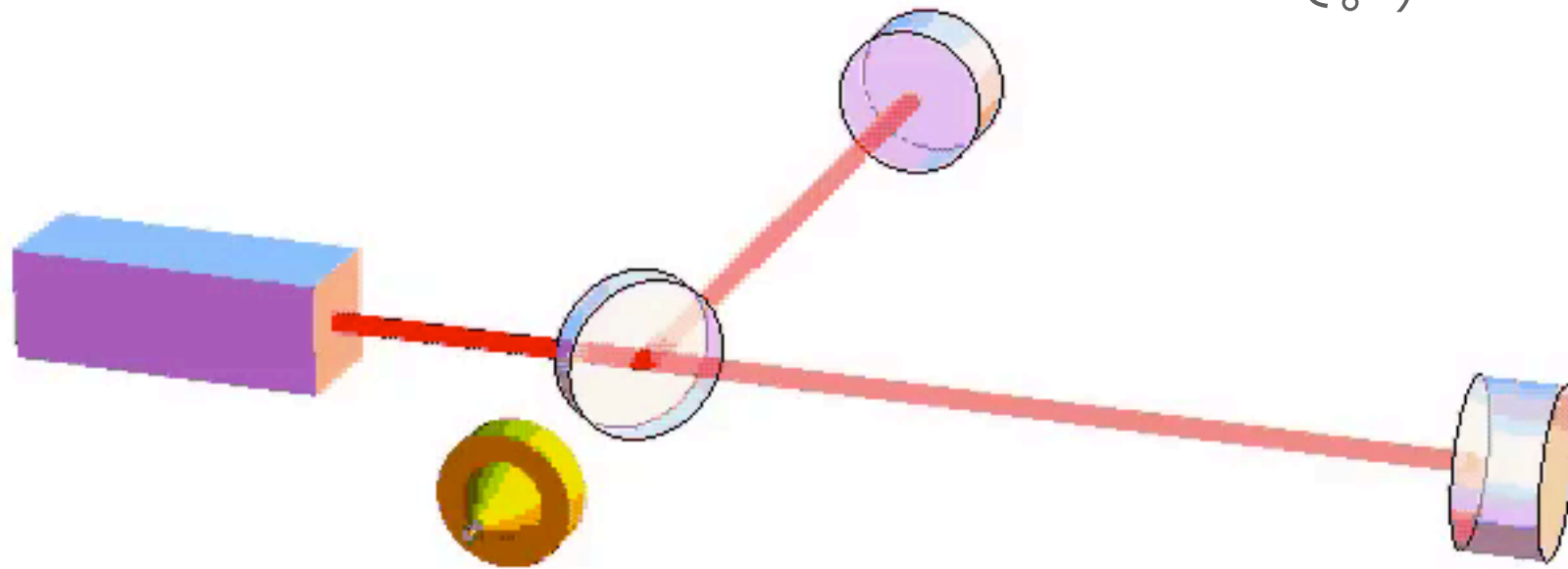
# 重力波検出器

- 時空の歪みによって、自由質点（ここでは鏡）の間の世界距離が変化、レーザー光の干渉（明暗）が変化する
- これを電気信号で取り出し、記録する。
- （実際にはもっと複雑。川村さんの講義にて。）



# 重力波検出器

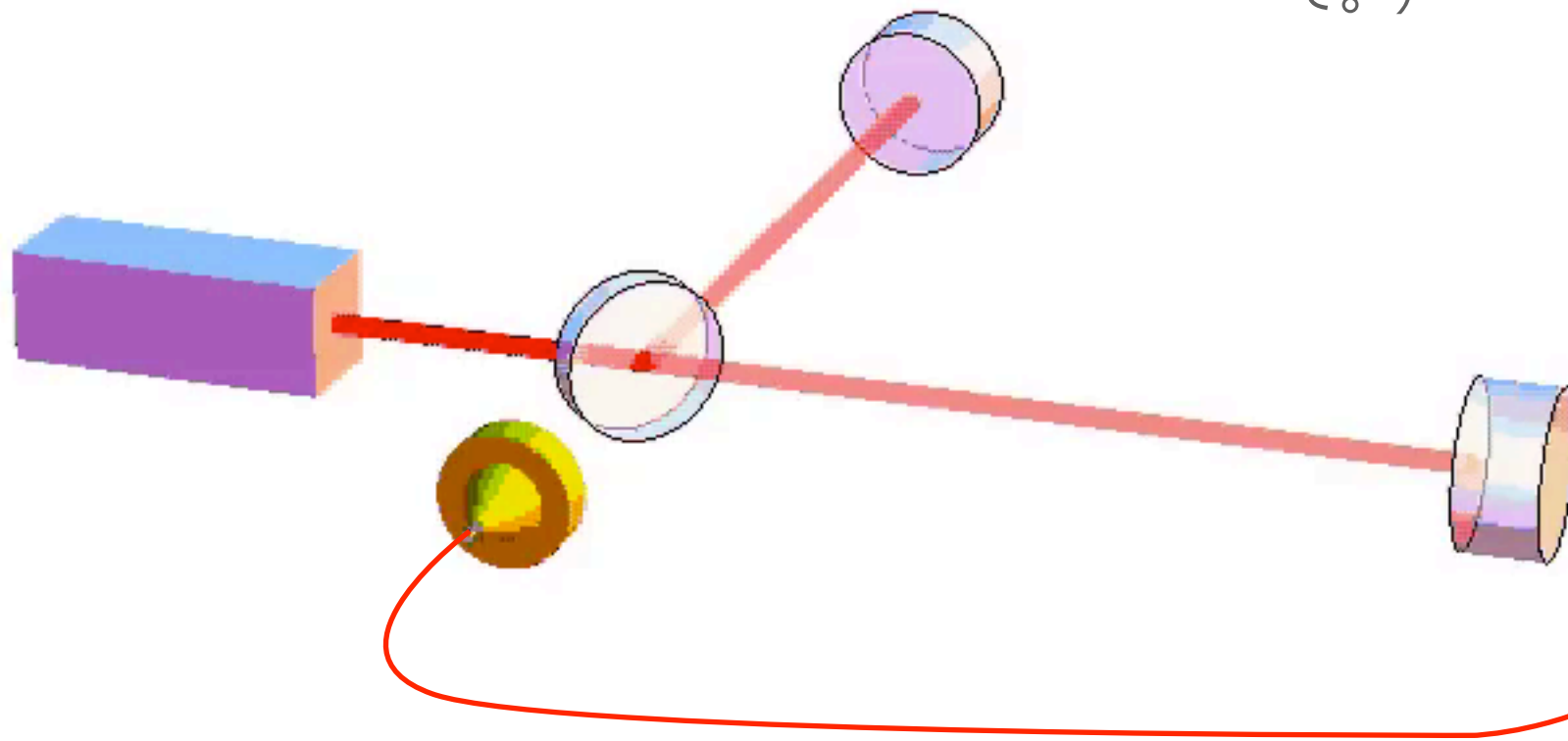
- 時空の歪みによって、自由質点（ここでは鏡）の間の世界距離が変化、レーザー光の干渉（明暗）が変化する
- これを電気信号で取り出し、記録する。
- （実際にはもっと複雑。川村さんの講義にて。）





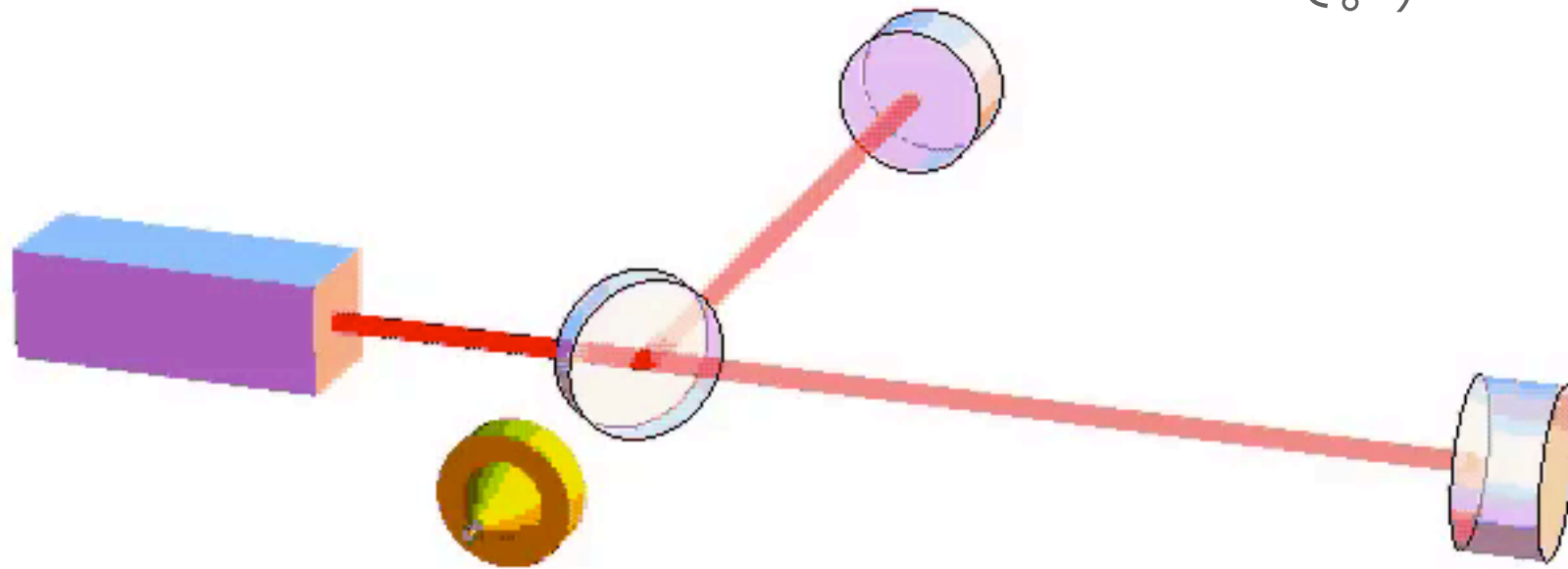
# 重力波検出器

- 時空の歪みによって、自由質点（ここでは鏡）の間の世界距離が変化、レーザー光の干渉（明暗）が変化する
- これを電気信号で取り出し、記録する。
- （実際にはもっと複雑。川村さんの講義にて。）



# 重力波検出器

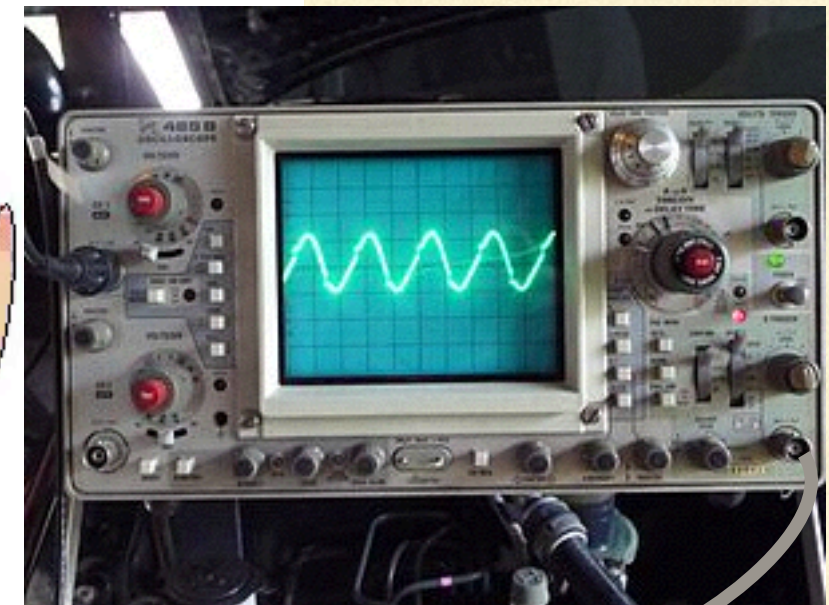
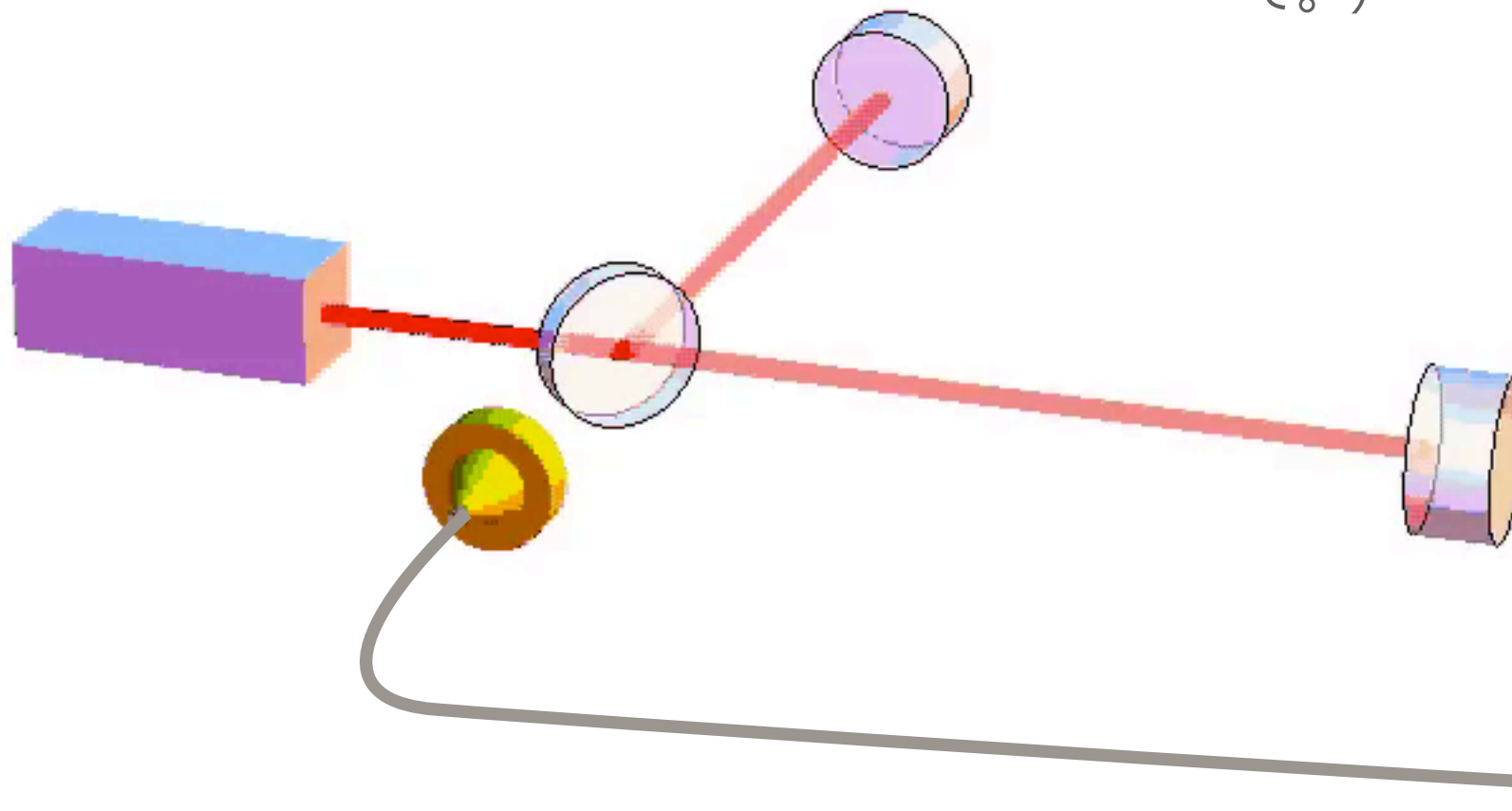
- 時空の歪みによって、自由質点（ここでは鏡）の間の世界距離が変化、レーザー光の干渉（明暗）が変化する
- これを電気信号で取り出し、記録する。
- （実際にはもっと複雑。川村さんの講義にて。）





# 重力波検出器

- 時空の歪みによって、自由質点（ここでは鏡）の間の世界距離が変化、レーザー光の干渉（明暗）が変化する
- これを電気信号で取り出し、記録する。
- （実際にはもっと複雑。川村さんの講義にて。）





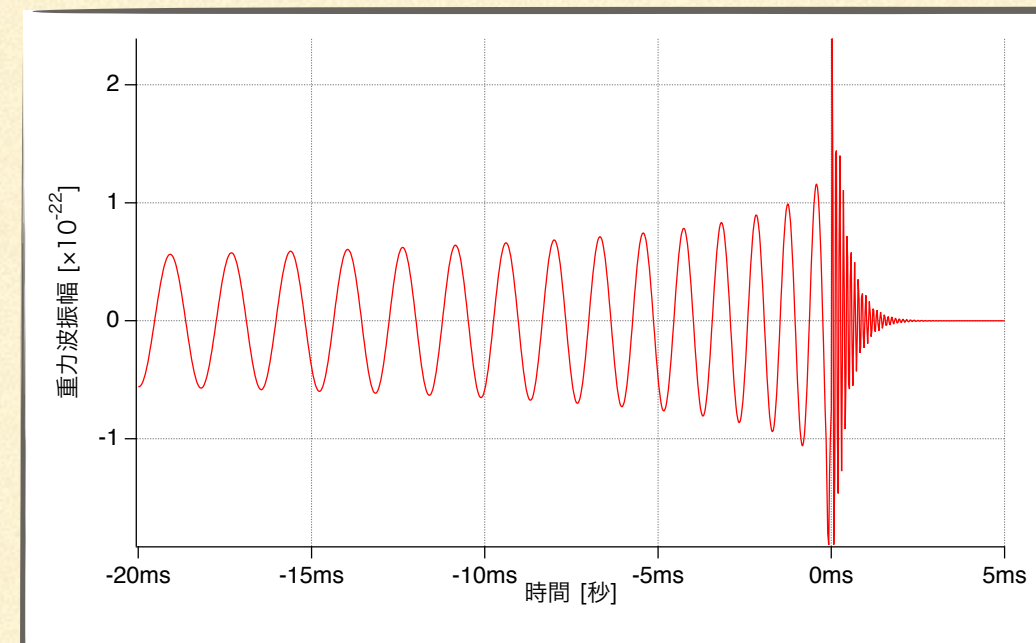
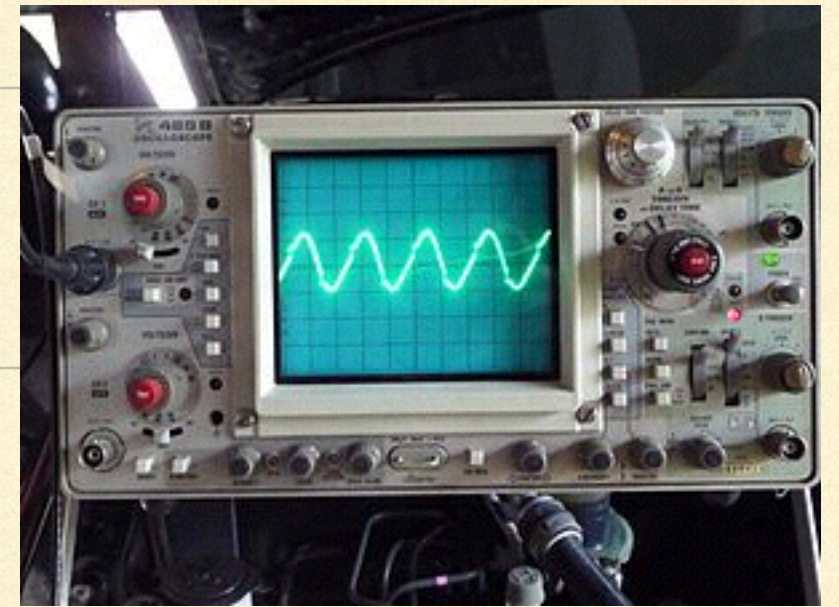
# 観測データ

- 信号は「**時系列**」で得られる。

$$h(t)$$

- データは**離散値**で記録される。

$$h(t_i)$$

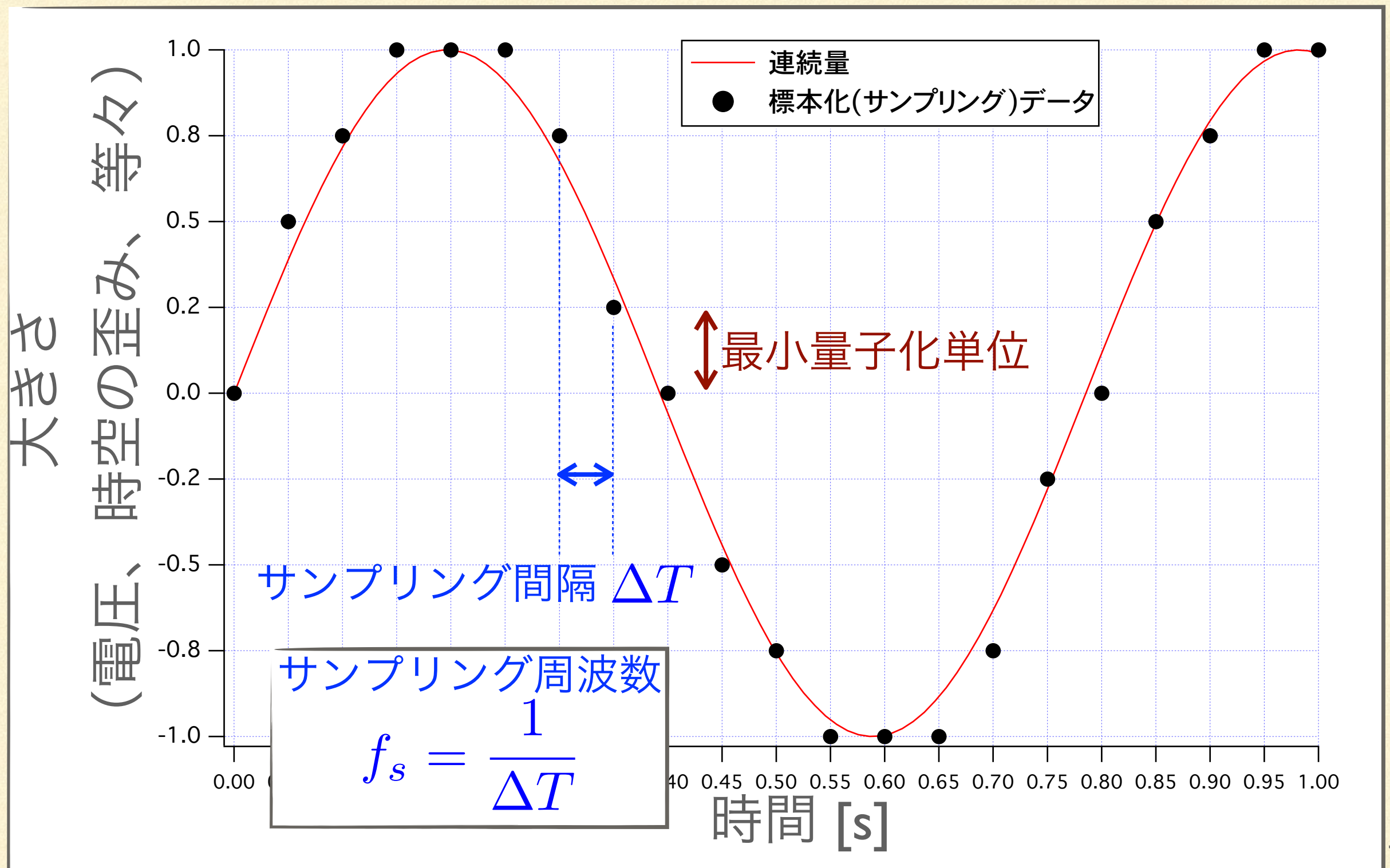


## 標本化 (サンプリング)

- 装置の出力は電気信号。しかるべき換算をして、時空の歪みに戻す。(cf: キャリブレーション)  $v(t) \rightarrow h(t)$



# 標本化 (サンプリング)

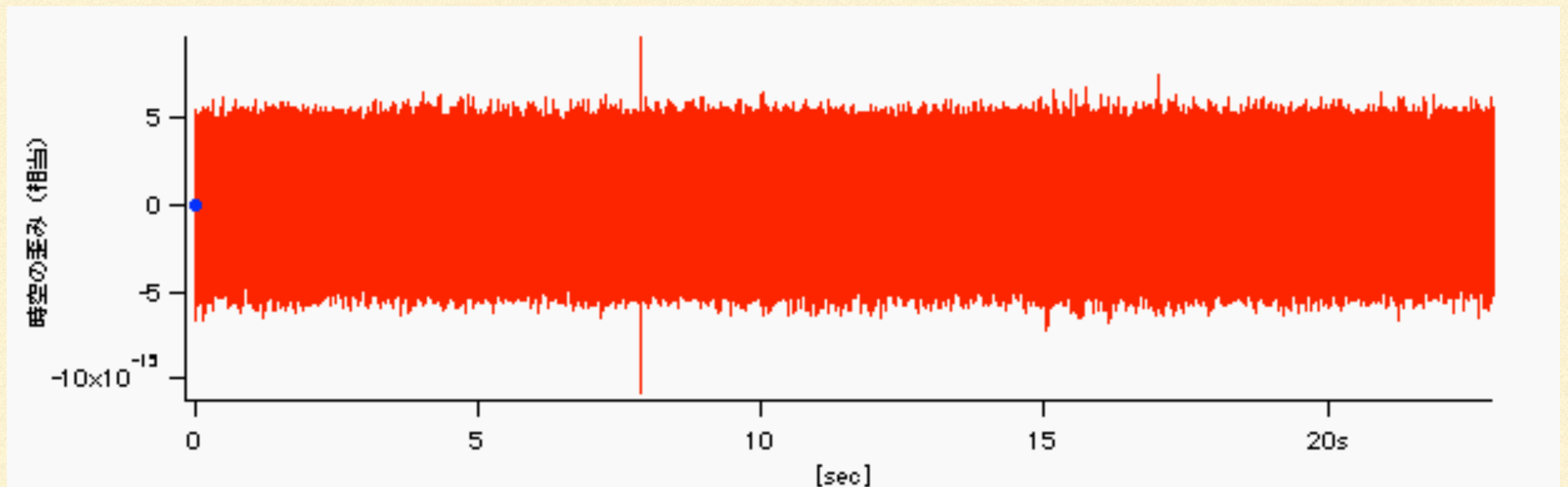




# 検出器雑音

- 装置や環境に起因する「雑音(ノイズ, noise)」がある。  $n(t)$

雑音にはいろいろあるが、乱数的な振る舞いをするものが多い。そのような場合、時系列のまま特徴づけて扱うのが少々面倒...



これはTAMA300のもの。 6



# 信号と雑音

- 観測で得られるのは、雑音+重力波信号

$$s(t) = h(t) + n(t)$$

- どうやって重力波  $h(t)$  を見つけるか？

Search 探索 → 長時間の観測を対象に

Identification, Tag 同定、印(札)を付ける → 何時に？

Extraction 取り出す → 波形の情報=重力波源の情報



---

# 重力波の信号を見つけるには？ (SIGNAL IDENTIFICATION)

---

- 探すべき重力波の波形を知っていること
- 雑音の性質を知っていること



# NOTE: フーリエ変換

cf: 日野幹雄 「スペクトル解析」 朝倉書店

- 時系列  $x(t) \Leftrightarrow$  周波数領域  $\tilde{x}(f)$

フーリエ変換

$$\tilde{x}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-2\pi i f t} dt$$

フーリエ逆変換

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(f) e^{2\pi i f t} df$$

振動数 [Hz]  $f$ , 角振動数 [rad/s]  $\omega$

$$\tilde{x}(f) = 2\pi X(\omega)$$

フーリエ変換  $X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt$

フーリエ逆変換  $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega$



# NOTE: (注意) フーリエ変換、逆変換の定義について

- 変換、逆変換はexpの肩の符号が逆だが、そもそも対称的に定義されていて、どちらを「逆」にするかは定義の問題

例えば、小出昭一郎「物理現象のフーリエ解析」(東京大学出版会)では、空間  $x$ , 時間  $t$  それぞれの場合で、以下：

$$\begin{aligned} \text{変換} \quad f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{ikx} dk \\ \text{(A) 逆変換} \quad F(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{変換} \quad f(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \\ \text{(B) 逆変換} \quad F(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt \end{aligned}$$

$$e^{i(kx - \omega t)}$$

- 高速フーリエ変換のプログラムでは

中身は、変換も逆変換も同じ

FFTW => (A)定義、Numerical Receipt C =>(B)定義



# NOTE: パワースペクトル密度

- 信号 $x(t)$ のエネルギー

Parseval の等式：
$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(f)^2 df$$

$x(t)$ の単位[m]

$t$ の単位 [s] として...

- 平均パワー 
$$\overline{x^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)^2 dt \quad [m^2]$$

- パワースペクトル密度 (power spectrum density) :  $P(f)$   $[m^2 / \text{Hz}]$

周波数  $f$ と $f+df$  の間に存在するパワー  $P(f) df$

$$\overline{x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} P(f) df \quad \leftarrow \text{これが「原義」かな}$$

$$P(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{T} X(f) X^*(f) \right] \quad \text{変動する信号なら} \quad P(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \text{E} \left[ \frac{1}{T} X(f) X^*(f) \right]$$

E[ ] は期待値 (アンサンブル平均)

||



# NOTE :

- 自己相関関数(auto-correlation function) とパワースペクトル (片側、両側)

$$\begin{aligned} \text{自己相関関数} \quad C(t, \tau) &= \text{E}[x(t) x(t + \tau)] \\ \text{定常確率仮定なら} \rightarrow C(\tau) &= \overline{x(t) x(t + \tau)} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) x(t + \tau) dt \end{aligned}$$

Wiener-Khintchineの関係 :

$$\begin{aligned} P(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} C(\tau) e^{-2\pi i f \tau} d\tau & E(f) &= 4 \int_0^{\infty} C(\tau) \cos 2\pi i f \tau d\tau \\ \text{両側スペクトル} & & \text{片側スペクトル} & \end{aligned}$$

$$E(f) = 2P(f) \text{ [m}^2/\text{Hz]}$$

この後、雑音の片側パワースペクトル密度 :  $S_n(f)$  [1/Hz] とします。

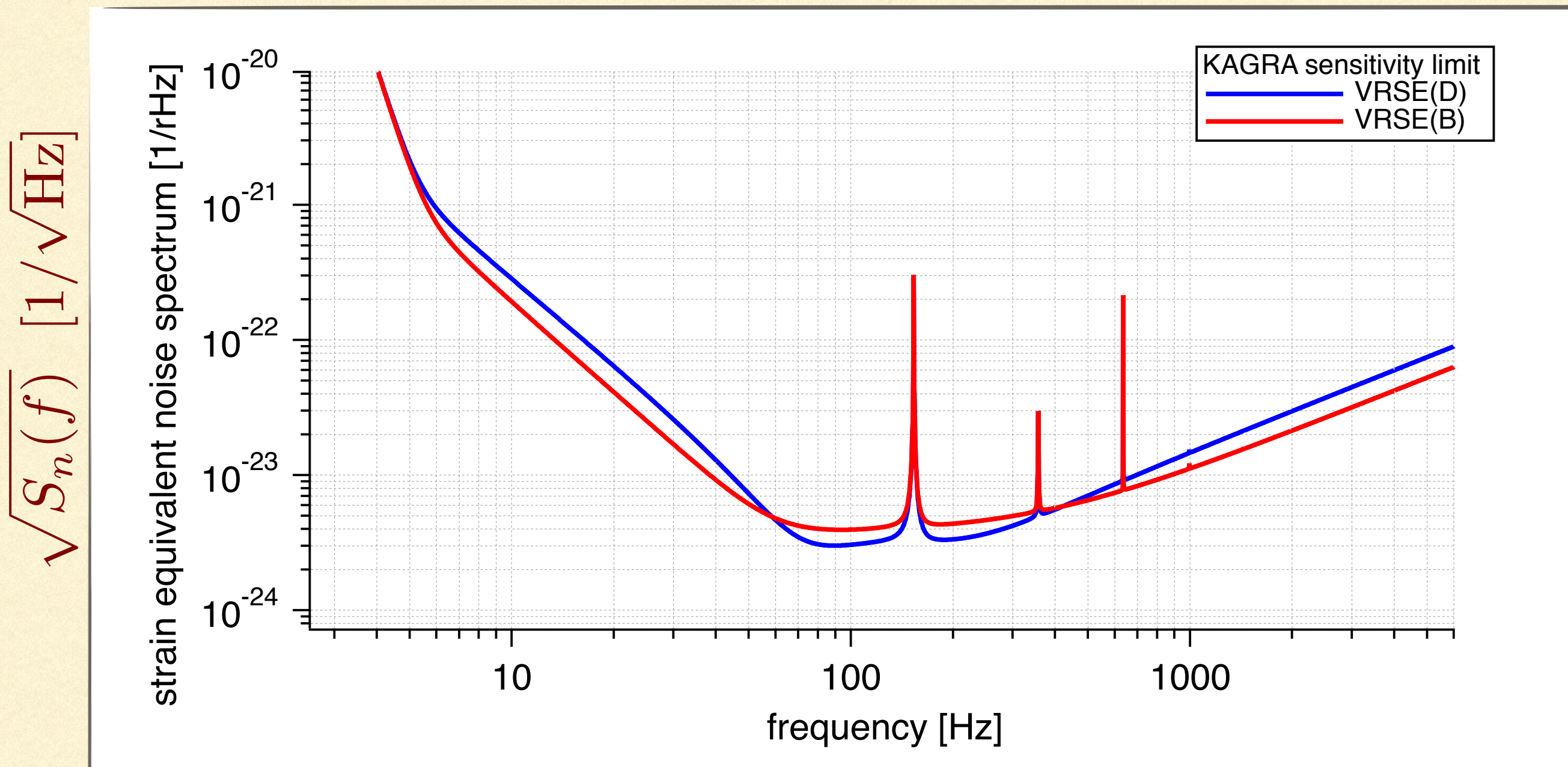
↑(計量の歪みと等価に換算した検出器の)

$$S_n(f) = \overline{\tilde{n}(f) \tilde{n}^*(f)}$$

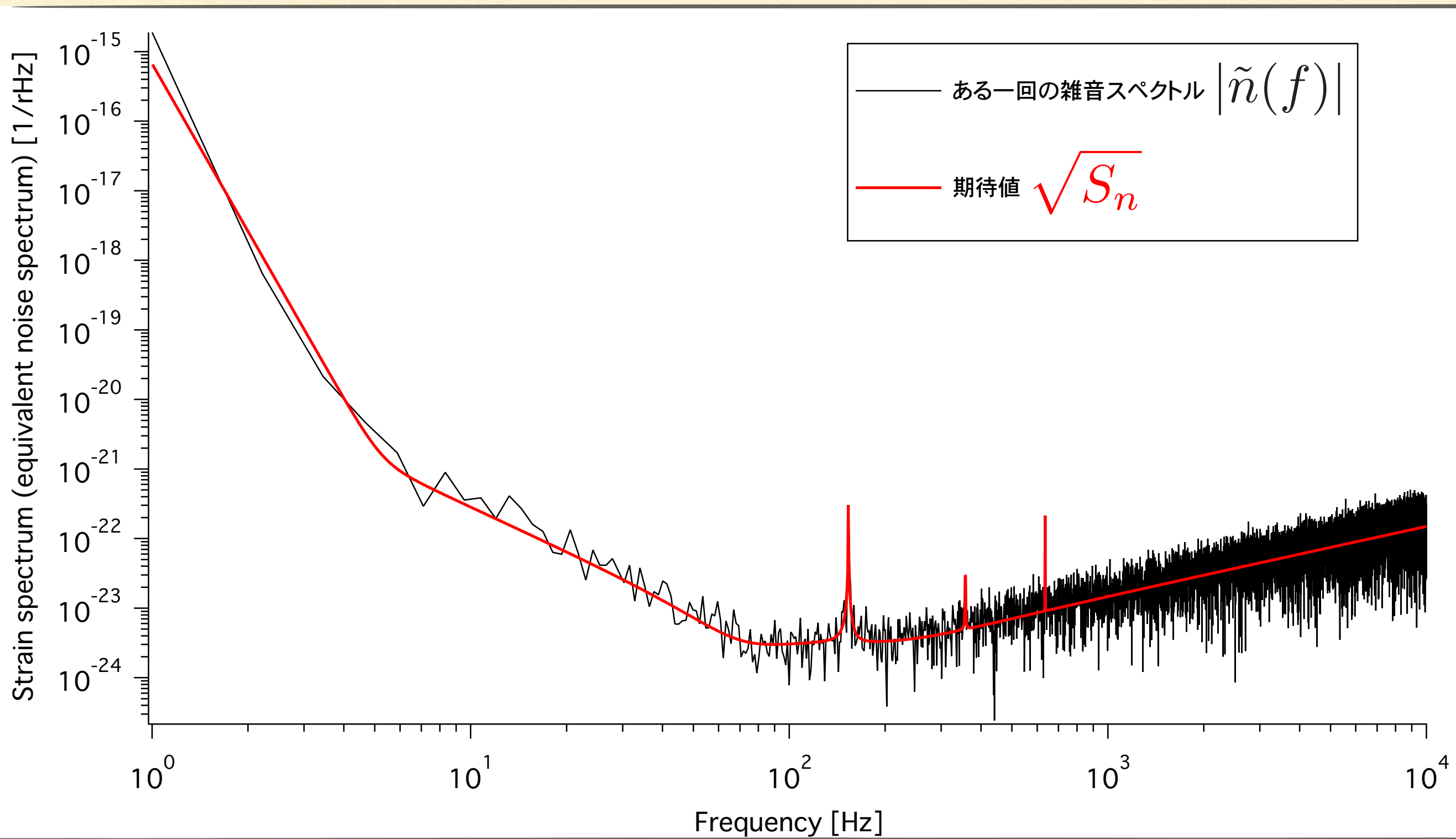


# KAGRAの雑音スペクトル

Sensitivity limit = Strain equivalent noise (amplitude average) spectrum





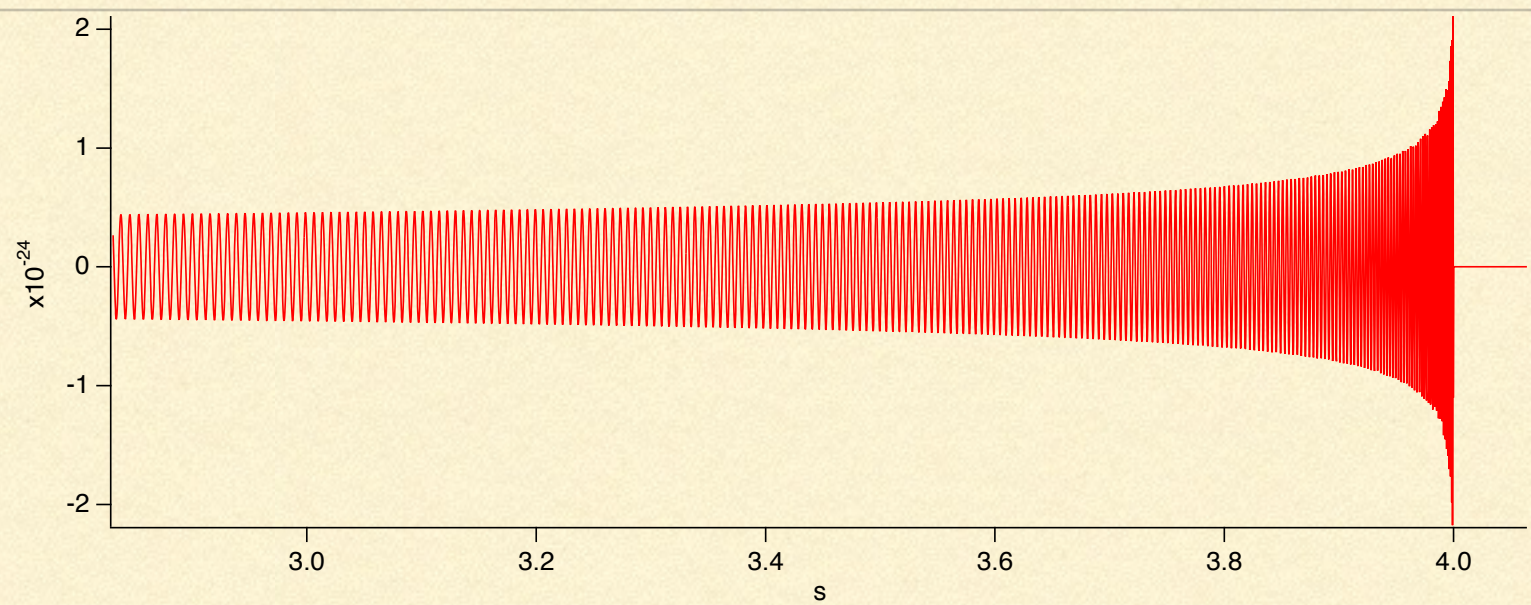




# コンパクト連星合体の重力波波形

- 「チャープ波形」

$$h(t)$$



最低次で様子を確認しておこう

- 連星軌道周期 :  $P_{orb}$
- $t=0$  での連星軌道周期 :  $P_0$
- 重力波の周期 :  $P_{GW}$
- 重力波の角振動数 :  $\omega$
- 重力波の振幅 :  $A$
- 軌道半径 :  $R$
- 連星質量 :  $m_1, m_2$
- チャープ質量 :  $\mathcal{M}$

$$P_{orb}(t) = \left( P_0^{8/3} - \frac{8}{3}kt \right)^{3/8}$$


$$k = \frac{96}{5c^5} (2\pi)^{8/3} (GM)^{5/3}$$

$$\mathcal{M} = (m_1 m_2)^{3/5} (m_1 + m_2)^{-1/5}$$

$$P_{orb}(t) = 2P_{GW}(t)$$

$$\text{ケプラー則 } G(m_1 m_2) = \left( \frac{2\pi}{P_{orb}} \right)^2 R^3 \quad (R \sim 10^8 \text{ m})_{15}$$



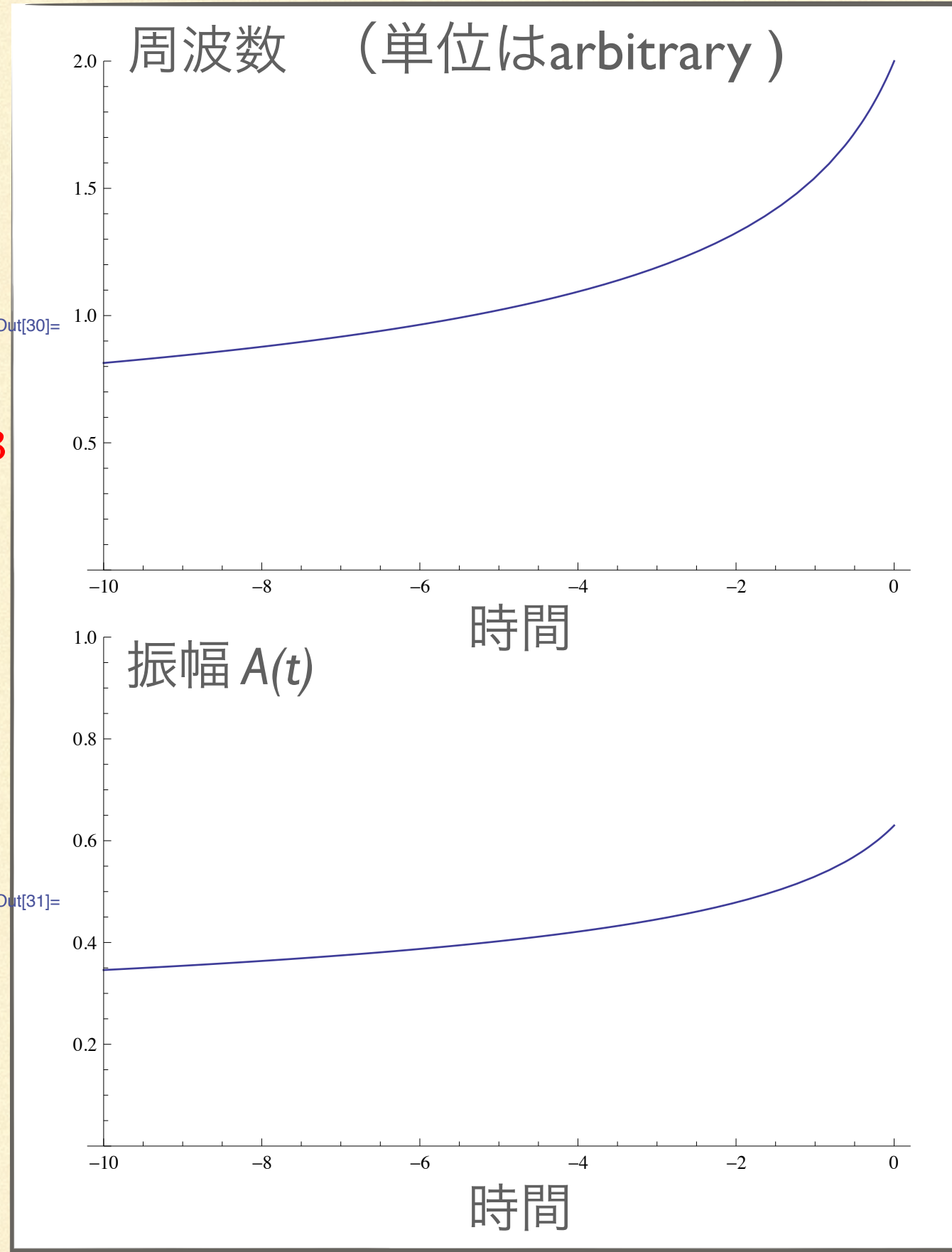

$$h(t) = A(t) \cos(\phi(t))$$

$$A(t) = \frac{2(GM)^{5/3}}{c^4 r} \left( \frac{\pi}{P_{GW}(t)} \right)^{2/3}$$

$\phi$  : 位相

Remark !!!

$$h(t ; m_1, m_2, t_0, \dots)$$





# 波形探索！！ $h(t ; m_1, m_2, t_0, \dots)$

- 1. 到来時刻  $t_0$  を知らない。

Ans : しらみつぶし

マッチドフィルター

- 2. 星の質量を知らない。

Ans : 考えられる質量範囲でのいろいろな波形

理論予想波形（テンプレート）群



# マッチドフィルタ—[超入門編]

$$\text{観測データ} : s(t) = A_0 h(t - t_0) + n(t)$$

理論予想波形と観測データの相関をとってみる。

簡単のため、質量については「当たり」を得ているとする。

$\tau$  に到来したとって、

$$\rho(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) h(t - \tau) dt$$

**正しい  $\tau$  のとき、  
 $\rho$  が大きくなるはず！**

$\tau$  をすこしずつ動かすかわりに、 $s, h$  のフーリエ変換を用いて、

$$\begin{aligned} \rho(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t) h(t - \tau) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{s}(f) \tilde{h}^*(f) e^{2\pi i f \tau} df \end{aligned}$$



雑音の多い周波数では寄与を小さく、  
雑音の少ない周波数では寄与を大きく！

$$\rho(\tau) = 2 \int_0^{\infty} \frac{\tilde{s}(f) \tilde{h}^*(f)}{S_n(f)} e^{2\pi i f \tau} df \quad : \text{Wiener Optimal Filter (ウィナー最適フィルタ)}$$

あとは、大きな  $\rho$  を探すだけ。

テンプレートに到来時刻もいっしょにいれて考えるなら、  
 $\tau=0$ として、以下でも等価。

$$\rho(\tau) = 2 \int_0^{\infty} \frac{\tilde{s}(f) \tilde{h}^*(f)}{S_n(f)} df$$



# 観測周波数帯

$$\rho(\tau) = 2 \int_0^{\infty} \frac{\tilde{s}(f) \tilde{h}^*(f)}{S_n(f)} df$$

0Hz -  $\infty$  は...

決める要素は、

$$\rho(\tau) = 2 \int_{f_{min}}^{f_{Max}} \frac{\tilde{s}(f) \tilde{h}^*(f)}{S_n(f)} df$$

$f_{min} - f_{Max}$  [Hz] にしましょう。

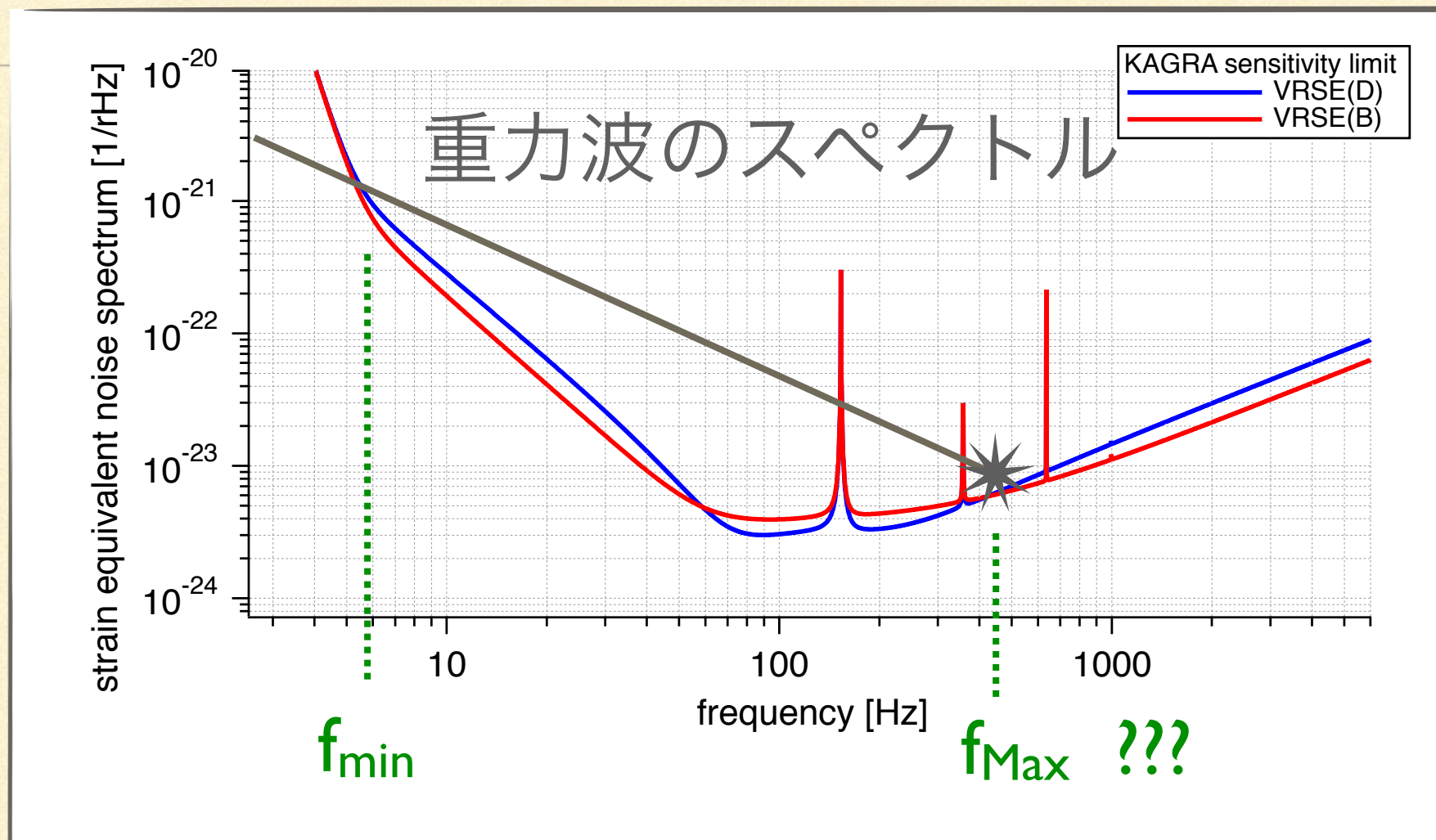
- (1) 重力波そのものの周波数
- (2) KAGRAの感度曲線 (これは本当は(1)に合わせて検出器を作る)

これらに合わせて、データを取る時点や計算するときには：

サンプリング周波数

データ長





連星合体の場合、

- $f_{\min}$  : KAGRAの低周波の雑音が大きくなってしまったり
- $f_{\text{Max}}$  : ISCO



# データについての条件

- ナイキスト周波数  $f_N$  [Hz]

$$f_N = \frac{1}{2} f_s$$

ナイキスト (Nyquist) の標本化定理：

「ナイキスト周波数の整数倍の周波数の波は、標本化データから再現できない

$$\text{条件： } f_N > f_{Max}$$

- データ長  $T$  [sec]

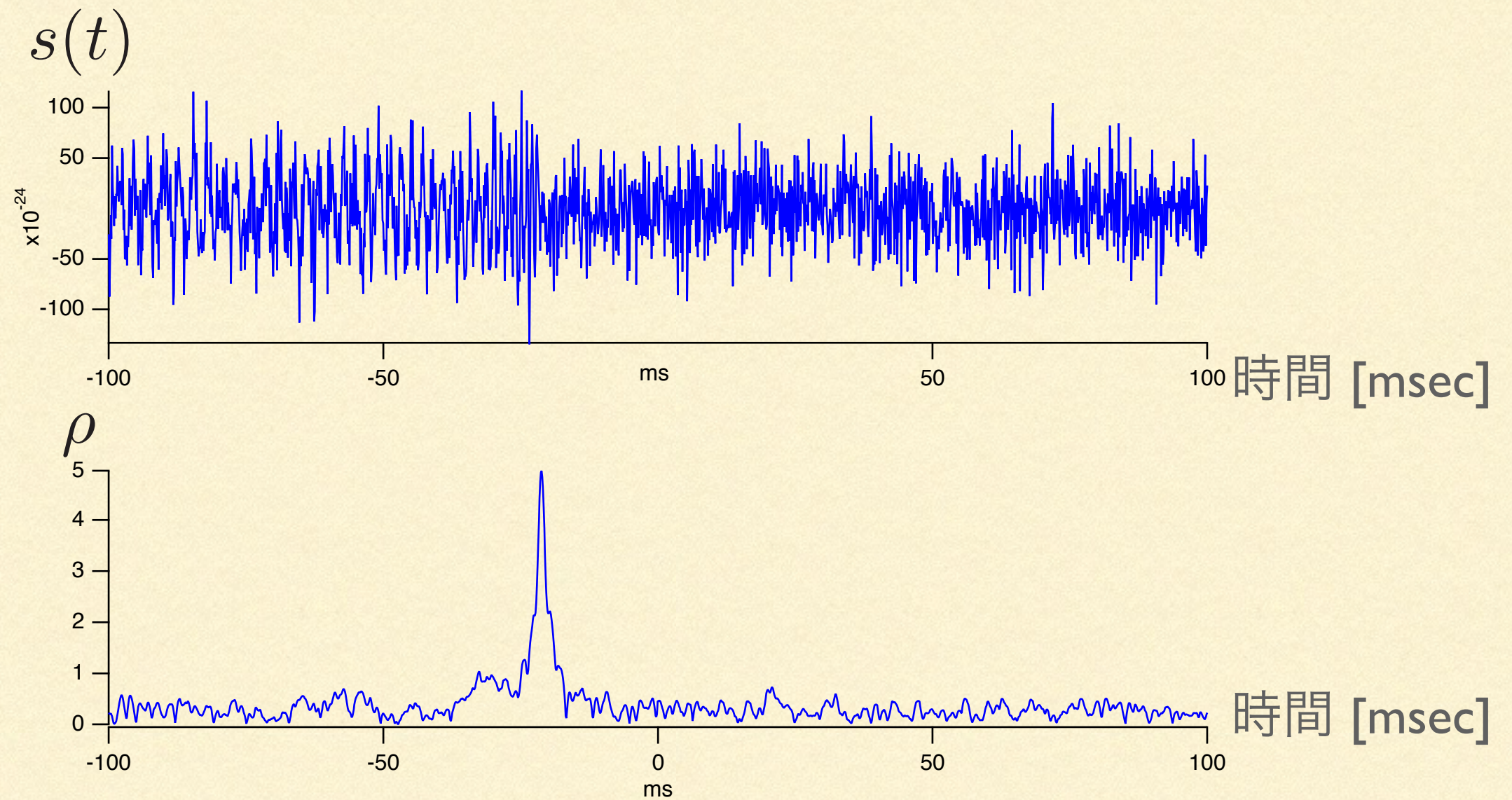
FFTの周波数分解能は、総データ長[sec]の逆数

$$\text{条件A： } T > \frac{1}{f_{min}}$$

条件B：データ長はテンプレート長より長いこと

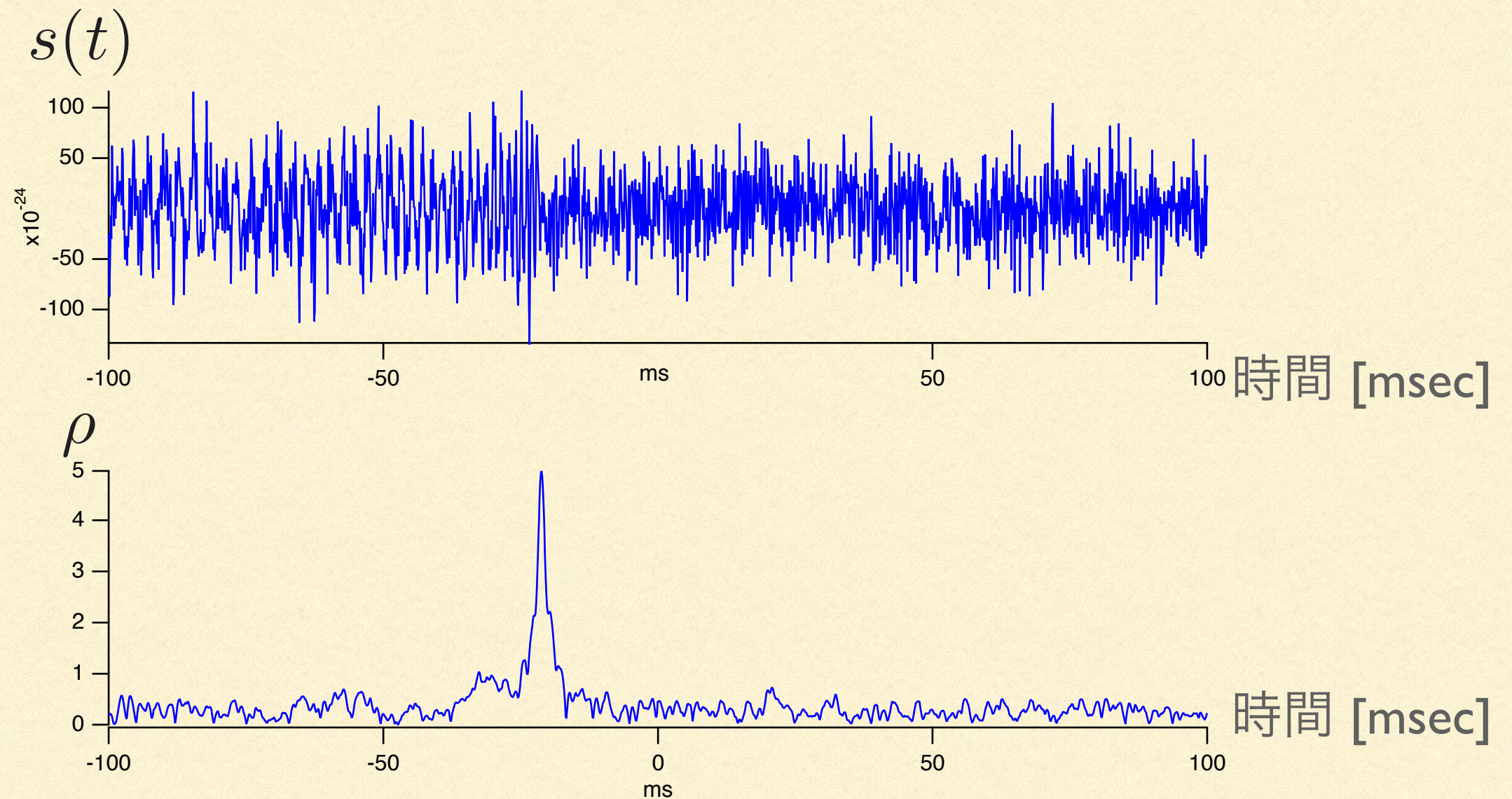


例： マッチドフィルターをかけますと....





例： マッチドフィルターをかけますと....



それでは皆さんも演習でやってみましょう！



---

# APPENDIX

---

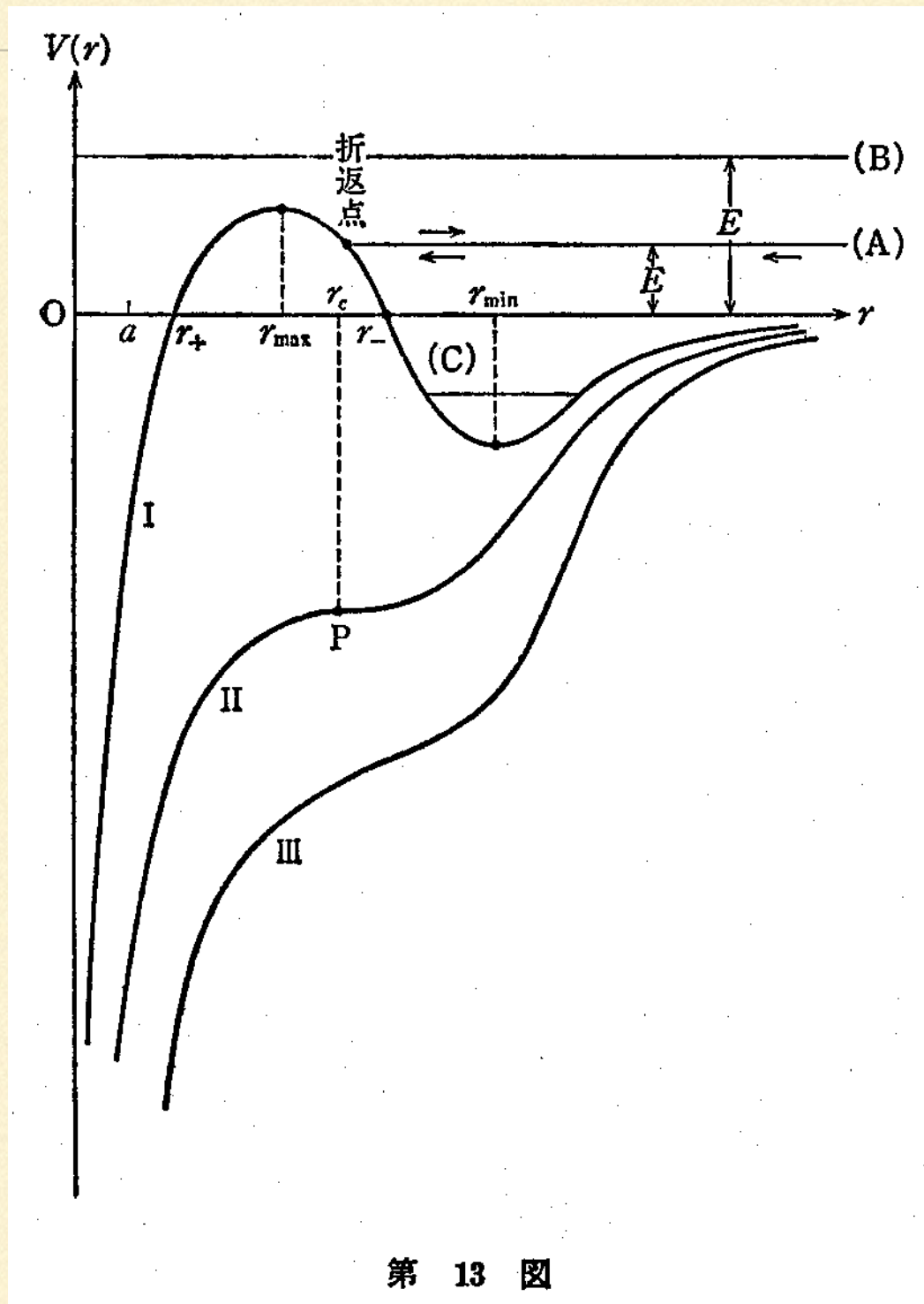


# ISCO (INNER-MOST STABLE CIRCULAR ORBIT, 最内安定円軌道)

BH周りを周る質点の半径方向のeffectiveなポテンシャル

$$V(r) = -\frac{GM}{r} + \frac{h^2}{2r^2} - \frac{ah^2}{2r^3}$$

角運動量  $h$ , シュバルツシルト半径  $a$



第 13 図