1 準備: ディレクトリ"UpperLimit/"

1.1 コード概略

- `sensitivity_upperlimit.m`: 重力波振幅のスピンダウンアッパーリミットと重力波検出器感度曲線を比較します。

- `checkDuplicatedData_ATNF_LIGOS5.m` LIGO S5 パルサーカタログのうち、ATNF カタログとダブっているものを見つけます。使わなくても良いです。出力は、LIGO S5 パルサーを除いた ATNF パルサーのリストです。

1.2 変数

- ATNFPulsars.pulsarNames: ATNF パルサーの J Name。

- ATNFPulsars.pulsarData: ATNF パルサーデータ行列。2 列目: 自転周波数 [Hz]、4 列目:距離 [kpc]、5 列目: 連星系に含まれるか否か (1 = 含まれる)、6 列目:h_0 のスピンダウン上限値

- LIGOS5Pulsars.pulsarNames: LIGO S5 パルサーの J Name。

- LIGOS5Pulsars.pulsarData: LIGO S5 パルサーデータ行列。2 列目: 自転周波数 [Hz]、4 列目:距離 [kpc]、5 列目:h_0 のスピンダウン上限値、6 列目:LIGO S5 の h_0 上限値、7 列目:連星系に含まれるか否か (1 = 含まれる)、8 列目:球状星団に含まれるか否か (1 = 含まれる)

データファイル

- `Pulsar_Catalogue/Catalogue_Description.txt` カタログの出所を示します。

- `Pulsar_Catalogue/ATNFPulsarCatalogue.mat`: ATNF Pulsar Catalogue

- `Pulsar_Catalogue/LIGOS5_NonGlitch_Pulsars.mat`: LIGO S5 non glitch pulsar catalogue

- `Detector_SensitivityCurve/BW2009_VRSEB.dat`:KAGRA 感度曲線 周波数と $\sqrt{S_h}$ が縦にならんでいます。

- `Detector_SensitivityCurve/BW2009_VRSED.dat`:KAGRA 感度曲線

- `Detector_SensitivityCurve/ZERO_DET_high_P.txt`: AdvLIGO 感度曲線

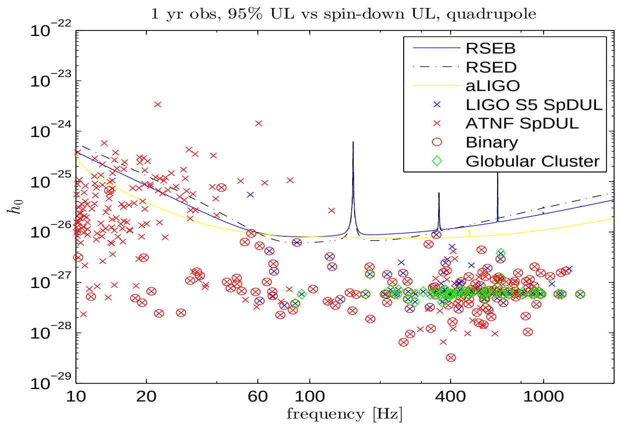

図 1: sensitivity upperlimit.m を起動したときに最初に現れる図その1 。ATNF pulsar catalogue から距離、自転周波数、自転周波数の微分が観測されているものをリストアップし、spin down upper limit を計算して、1 年間積分した場合の(α,δ,ψ,ι について平均を取っている)感度曲線と重ねてプロットした。

- `Pulsar_Catalogue/LMXB_Watt2008_For_loadfunction.txt` Watts et al 2008 の Table 1 から抜き出したデータです。1 列目: 周波数 [Hz]、2 列目: 距離 [kpc]、3 列目: bolometric X-ray flux F [10^{-8} erg cm^{-2} s^{-1}] です。

感度曲線の出所は、`sensitivity_upperlimit.m` のヘッダ参照。

1.3 演習

1. Octave を立ち上げ、`sensitivity_upperlimit.m` を起動してください。図 1と 2の2 つが現れれば成功です。

2. 参考文献 [1] の式 (5)、Table 1 を利用して、同文献の Figure 2 を再現してください。式 (5) は

$$h_0 = 3 \times 10^{-27} F_{-8}^{1/2} \left(\frac{R}{10\mathrm{km}}\right)^{3/4} \left(\frac{1.4M_\odot}{M}\right)^{1/4} \left(\frac{1\mathrm{kHz}}{\nu_s}\right)^{1/2} \quad (1)$$

で、Table 1 は `Pulsar_Catalgue` に”`LMXB_Watt2008_For_loadfunction_modified.txt`”としてあります。データは octave/matlab の”load”関数で取り込んで使ってください。図 3のようなグラフを得られれば成功です。

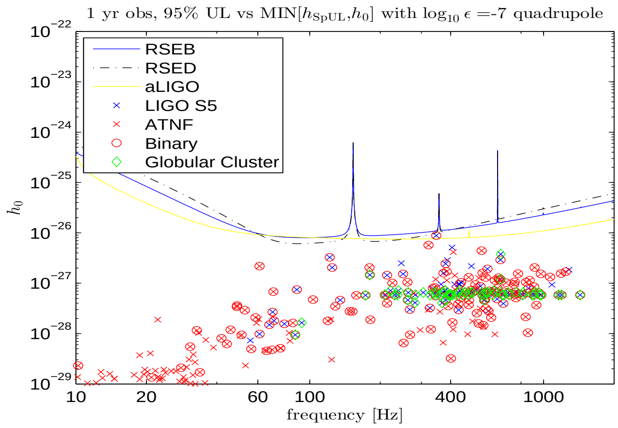

図 2: sensitivity upperlimit.m を起動したときに最初に現れる図その 2。ATNF pulsar catalogue から距離、自転周波数、自転周波数の微分が観測されているものをリストアップし、spin down upper limit を計算し、さらに $\epsilon = 10^{-7}$ のときの h_0 と比較して小さい方をプロットした。1 年間積分した場合の（ α,δ,ψ,ι について平均を取っている）感度曲線の上に重ねている。

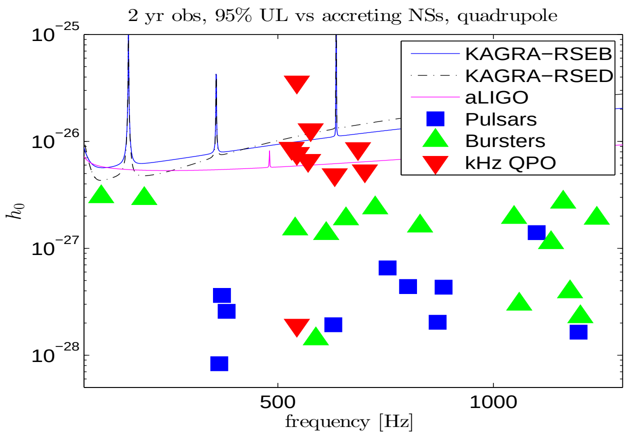

図 3:

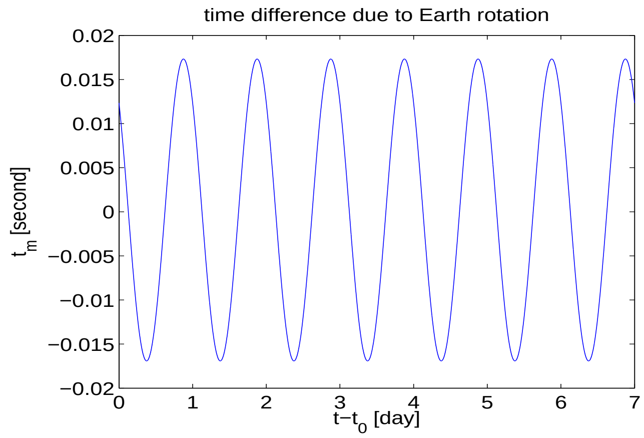

図 4: Roemer time delay due to the Earth rotation.

2 演習: ディレクトリ"ComputeFStatistic/"

2.1 背景説明

2.1.1 信号モデル

次のような信号モデルを仮定します。

$$h(t) = F_+(t)h_+(t) + F_\times(t)h_\times(t), \tag{2}$$

$$h_+(t) = \frac{1}{2}h_0\left(1+\cos^2\iota\right)\cos 2\Psi(t), \tag{3}$$

$$h_\times(t) = h_0\cos\iota\sin 2\Psi(t), \tag{4}$$

$$\begin{aligned}\Psi(t) &= \Phi_0 + \Phi(t) \\ &= \Phi_0 + 2\pi\sum_{k=0}^{s} f_0^{(k)}\frac{t^{k+1}}{(k+1)!} + \frac{2\pi}{c}\vec{n}_0\cdot\vec{r}_d(t)\sum_{k=0}^{s} f_0^{(k)}\frac{t^k}{k!}\end{aligned} \tag{5}$$

このモデルでは、重力波信号はまず、波源(=パルサー) の方向 $\vec{n}_0$、inclination angle ι, パルサーの自転の初期位相 Φ_0、周波数およびその時間微分 $f_0^{(k)}$ に依存します。また、検出器の太陽系重心 (Solar Sytem Barycenter = SSB) に対する位置ベクトル $r_d(t)$ と Beam pattern functions $F_{+,\times}(t)$ を通して、地球自転および公転の様子と重力波の偏極角 (polarization angle ψ) に依存します。

なお、ここでは簡単のため SSB と検出器との時間遅れは Roemer time delay のみを考えています。自転運動および公転運動による Roember time delay の様子は、図 4, 5 にあります。

実際の解析では、JPL Ephemeris を用いて、Shapiro time delay (信号 SSB からが検出器まで伝搬するときに、太陽による重力場の影響を受ける), Einstein time delay(検出器の時計が地球の公転運動による特殊相対論的効果と地球の

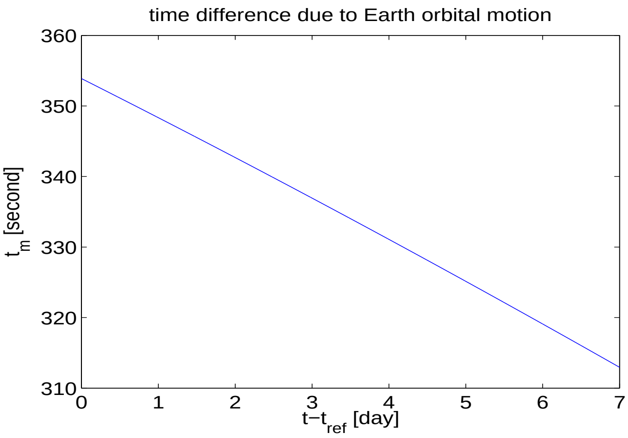

図 5: Roemer time delay due to the Earth orbital motion.

重力および太陽による重力の効果で影響を受ける) を考慮に入れます。また、重力波位相への他の効果としては、近傍のパルサーであれば、固有運動の効果、球状星団中のパルサーであれば星団の重力による加速運動の効果、連星中のパルサーであれば、連星運動の効果を考慮に入れます。

Beam pattern functions $F_{+,\times}(t)$ は、

$$F_+(t) = a(t)\cos 2\psi + b(t)\sin 2\psi, \tag{6}$$

$$F_\times(t) = b(t)\cos 2\psi - a(t)\sin 2\psi, \tag{7}$$

$$\tag{8}$$

と、amplitude modulation functions $a(t), b(t)$ を使って書けます。一方、後者は、地球の自転にしたがって時間変化する関数です。今回の演習では 7 日間のデータを使いますが、a, b の様子は図 6のようになります。

以上の信号モデルはさらに 4 つのモード (a, b と $\cos, \sin$ それぞれの積) に分けることができます。

$$h(t) = \sum_{i=1}^{4} A_i h_i(t), \tag{9}$$

$$h_1(t) = a(t)\cos 2\Phi(t), \tag{10}$$

$$h_2(t) = b(t)\cos 2\Phi(t), \tag{11}$$

$$h_3(t) = a(t)\sin 2\Phi(t), \tag{12}$$

$$h_4(t) = b(t)\sin 2\Phi(t) \tag{13}$$

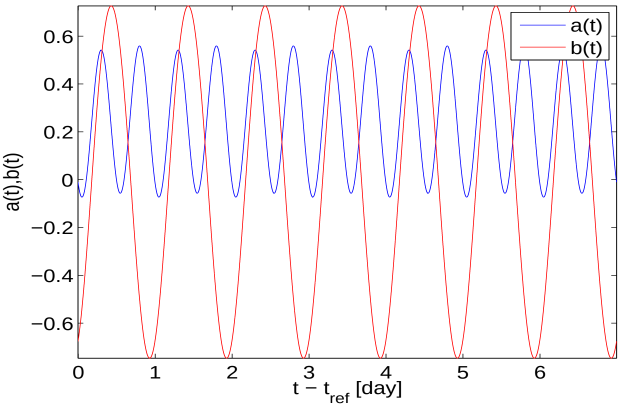

図 6: Amplitude modulation functions.

$$A_1 = h_0 \left[\frac{1}{2}(1+\cos^2\iota)\cos 2\psi \cos 2\Phi_0 - \cos\iota \sin 2\psi \sin 2\Phi_0 \right], \tag{14}$$

$$A_2 = h_0 \left[\frac{1}{2}(1+\cos^2\iota)\sin 2\psi \cos 2\Phi_0 + \cos\iota \cos 2\psi \sin 2\Phi_0 \right], \tag{15}$$

$$A_3 = h_0 \left[-\frac{1}{2}(1+\cos^2\iota)\cos 2\psi \sin 2\Phi_0 - \cos\iota \sin 2\psi \cos 2\Phi_0 \right], \tag{16}$$

$$A_4 = h_0 \left[-\frac{1}{2}(1+\cos^2\iota)\sin 2\psi \sin 2\Phi_0 + \cos\iota \cos 2\psi \cos 2\Phi_0 \right], \tag{17}$$

(18)

2.1.2 最尤推定法による信号検出

検出器のノイズがガウシアン統計にしたがうとし、検出器出力が

$$x(t) = n(t) + h(t) \tag{19}$$

とかけるとします。検出器のノイズがガウシアン統計にしたがうと仮定したので、尤度関数の対数は、

$$\ln\Lambda = (x|h) - \frac{1}{2}(h|h) \tag{20}$$

です。ただし、内積は

$$(x|y) \equiv 4\mathcal{R}\int_0^\infty \frac{\tilde{x}(f)\tilde{y}^*(f)}{S_h(f)}df \tag{21}$$

で、S_h は検出器ノイズの片側パワースペクトル密度 (one-sided spectral density) です。あるいは、

$$< \tilde{n}(f)\tilde{n}^*(f') > = \frac{1}{2}S_h(f)\delta(f-f') \tag{22}$$

です。ここでさらに観測時間 T_0 が有限であること、パルサーからの重力波はほとんど単色波であることを利用して $\ln\Lambda$ を以下のように書き直します。

$$\ln\Lambda = \frac{T_0}{S_h(2f_0)}\left[(x||h) - \frac{1}{2}(h||h)\right], \tag{23}$$

$$(x||y) \equiv \frac{2}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)y(t)dt \tag{24}$$

($2f_0 = f_{GW}$ としています。) 最尤推定法では、尤度関数を最大にする信号パラメータを求めます。実は、A_i を用いると、尤度関数の最大化は、h_0, ψ, ι, Φ_0 については解析的にできます。

$$\frac{\partial \ln\Lambda}{\partial A_i} = 0 \tag{25}$$

これを解くと、4 つの振幅 A_i の最尤推定量は

$$\hat{A}_1 = 2\frac{B(x||h_1) - C(x||h_2)}{D} \tag{26}$$

$$\hat{A}_2 = 2\frac{A(x||h_2) - C(x||h_1)}{D} \tag{27}$$

$$\hat{A}_3 = 2\frac{B(x||h_3) - C(x||h_4)}{D} \tag{28}$$

$$\hat{A}_4 = 2\frac{A(x||h_4) - C(x||h_3)}{D} \tag{29}$$

$$\tag{30}$$

とかけます。これを尤度関数に戻してやったものが F-statistic と呼ばれるものです。

$$F = \frac{T_0}{S_h}\frac{B(x||h_1)^2 + A(x||h_2)^2 - 2C(x||h_1)(x||h_2)}{D} \tag{31}$$

$$+ \frac{T_0}{S_h}\frac{B(x||h_3)^2 + A(x||h_4)^2 - 2C(x||h_3)(x||h_4)}{D} \tag{32}$$

したがって、F-statitic は4 つのパラメータ $(h_0, \psi, \iota, \Phi_0)$ について最大化した尤度関数ということができます。残りのパラメータ $\vec{n}_0, f_0^{(k)}$ については尤度関数を解析的に最大化することはできないので、数値的に尤度関数の最大化を図ります。すべてのパラメータについて最大化された F-statistic が事前に決めておいたしきい値を越えた場合、そのパラメータを持つ重力波信号の候補が見つかったことになります。しきい値はたとえば False Alarm から決めることができるでしょう。

2.1.3　F-statistic の計算方法

F-statitic の計算には4 つの実フィルター出力 $(x||h_i)$ が必要になりますが、その代わりに2 つの複素フィルター出力を使うこともできます。

$$F_a = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)a(t)\exp[-i2\Phi_s(t)]\exp[-i4\pi f_0(t+t_m(t))]dt \tag{33}$$

$$F_b = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)b(t)\exp[-i2\Phi_s(t)]\exp[-i4\pi f_0(t+t_m(t))]dt \tag{34}$$

ただし、$\Phi_s(t)$ は周波数 f に依存しない位相成分で、より正確には

$$\Phi(t) = 2\pi f_0[t+t_m(t;\alpha,\delta)] + \Phi_s(t; f_0^{(k\geq 1)}, \alpha, \delta) \tag{35}$$

です。あるいは、SSB time $t_b = t + t_m(t)$ を使うと、$dt \simeq dt_b$ より

$$F_a \simeq \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t(t_b))a(t(t_b))\exp[-i2\Phi_s(t(t_b))]\exp[-i4\pi f_0 t_b]dt_b \tag{36}$$

$$F_b \simeq \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t(t_b))b(t(t_b))\exp[-i2\Phi_s(t(t_b))]\exp[-i4\pi f_0 t_b]dt_b \tag{37}$$

とも書けます。よって、本来検出器時刻 t でサンプルされたデータを SSB の時刻 t_b でサンプルしなおしてやることによって、F_a, F_b は FFT を使って高速に計算することができます。実習のコードではこのテクニックを使っています。

2.1.4　データ量を減らす

さらに、ある周波数帯域だけのみ興味がある場合、Complex heterodyning technique を使ってデータ量を減らすことができます。LIGO のデータは 16384Hz でサンプリングされているため、7 日間のデータは実に 80GB (= 16384Hz $\times$ 7days $\times$ 86400seconds/day $\times$ 8byte for double) になります。今回の実習では 22Hz 付近でヘテロダインをおこない、帯域を 0.026Hz に制限した後にダウンサンプルし、データ量を減らしています。減らした後のスペクトルは図 7, 時系列は 8になります。

さらに Complex Heterodyned time series 使ってある α, δ について F_a, F_b, F を求めた結果が図 9, 10です。

2.2　コード概略

- `ComputeFStatistic_driver.m`: ComputeFStatistic コア関数のドライバーです。演習ではこちらを使います。

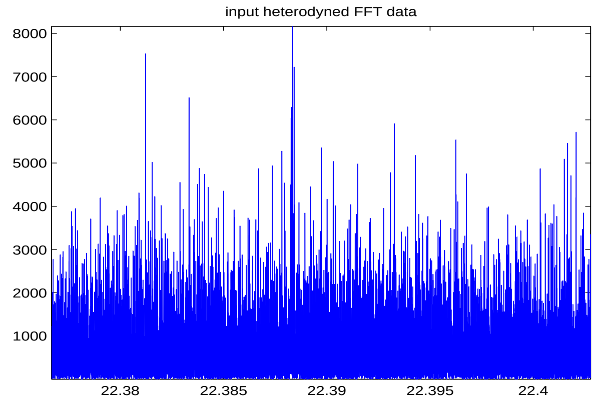

図 7: Powerspectrum of stiched Complex Heterodyned Band-limited FFTed Data

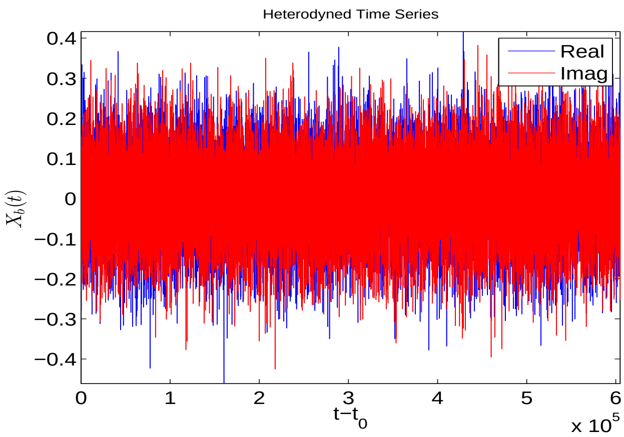

図 8: Complex Heterodyned Band-limited time series.

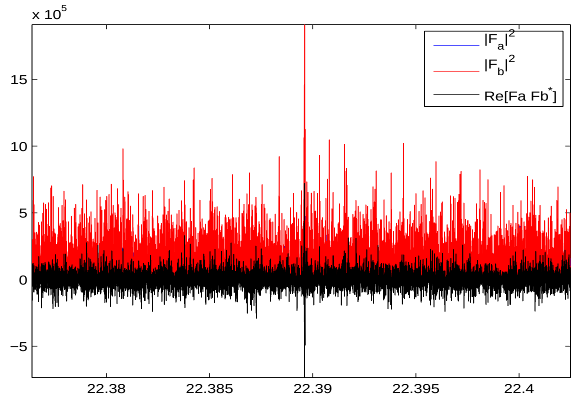

図 9: Fa and Fb at certain (α, δ).

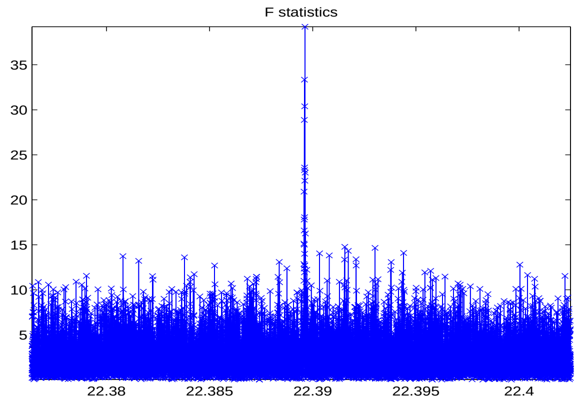

図 10: F-statistic at certain (α, δ).

- `ComputeFStatistic.m`: F-statistic を計算するコアの関数です。講義で解説します。

コードで使用されている変数については、コードを見てください。

2.3 演習

1. Octave を立ち上げ、`ComputeFStatistic_driver.m` を起動してください。図が1 つ現れれば成功です。

2. `ComputeFStatistic_driver.m` を修正して、さまざまな (α, δ) で F-statistic を計算するコードを書いてください。周波数空間と天域のどこで最大の F-Statistic をとるか調べてください。周波数微分は探索しないでください。

3. 重力波振幅 h_0 の最尤推定量を求めてください。ただし簡単のため inclination は 0 度とします。

4. 簡単のため検出器ノイズがガウシアン分布にしたがうとします。検出した重力波信号の false alarm probability を計算してください。

5. 重力波振幅の 90% Confidence interval を求めてください。ただし簡単のためノイズはガウス分布とし、信号対雑音比の 2 乗 ρ^2 は

$$\rho^2 = \frac{4h_0^2 T_0}{25 S_h}$$

とかけるとします。

F-statistic の参考文献は [2] や [3] です。

2.3.1 演習問題1

問題:「 Octave を立ち上げ、`ComputeFStatistic_driver.m` を起動してください。 図 11が現れれば成功です。」

2.3.2 演習問題 2

問題:「 `ComputeFStatistic_driver.m` を修正して、さまざまな (α, δ) で F-statistic を計算するコードを書いてください。」

ComputeFStatitic 関数は、
`targetPrms.rightAscension_radian` と
`targetPrms.declination_radian`
で与えられる赤道座標の様々な赤径· 赤緯 (α, δ) に対して F-Statistic を計算、

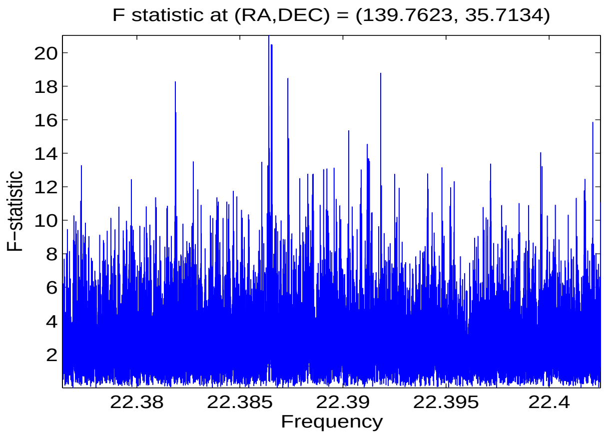

図 11: ComputeFStatistic driver.m を起動したときに最初に現れる図。

Fstat 変数として出力します。(α, δ) の与え方は自由ですが、あまり細かく天域を区切ると、計算時間がかかります。結果は図 12のようになります。図 12は octave の contour 関数を利用しています。また、周波数については空の各方向で最大化しています。あるいは、

$$\max_{f \in B} F(f, \alpha, \delta) \tag{38}$$

（ B は探索した周波数帯域）を図示しています。

2.3.3 演習問題 3

問題:「 重力波振幅 h_0 の最尤推定量を求めてください。ただし簡単のため inclination は 0 度とします。」

関数 ComputeFStatistic は、以下を出力します。

$$\bar{F}_a(f) = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} a(t)\bar{x}(t)\mathrm{e}^{-i2\Phi_s(t)} e^{-i4\pi f(t+t_m(t))} dt \tag{39}$$

$$\bar{F}_b(f) = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} b(t)\bar{x}(t)\mathrm{e}^{-i2\Phi_s(t)} e^{-i4\pi f(t+t_m(t))} dt \tag{40}$$

ここで、$\bar{x}(t)$ はノイズで規格化した時系列、

$$\bar{x}(t) = \int df \frac{X(f)}{\sqrt{S_h(f)}} \mathrm{e}^{i2\pi ft} \tag{41}$$

です。S_h は、探索したいパルサーの周波数から少し離れた信号の影響の無いと考えられる帯域のデータから推定します。このコードでは $t_m(t)$ として、Roemer time delay ($\sim$ 500 seconds)

$$ct_m(t) = \vec{n}_0 \cdot \vec{r}_d(t) \tag{42}$$

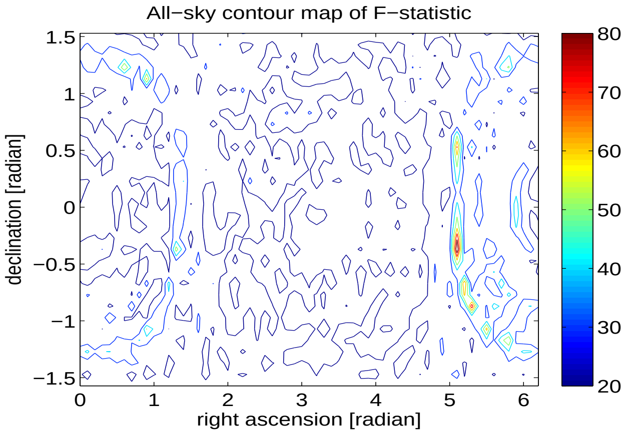

図 12: $\alpha = 0.1$ radians, $\delta = 0.1$ radians 刻みで天域を探索したときに得られる F-statistic の全天マップ。周波数については、周辺化している（空の各方向で、周波数については最大化している）。

のみを考慮に入れています。(実際の解析では Einstein time delay ($\sim$ millisecond), Shapiro time delay ($\sim$ 100 microsecond) も考慮に入れます。) また、$\vec{n}_0$ は赤道座標でのパルサーの単位方向ベクトル、$r_d(t)$ は検出器の SSB に対する相対位置ベクトルです。近傍のパルサー（速度によりますが、たとえば 40pc 程度。[2] 参照）で固有運動を考える場合は $\vec{n}_0$ は時間変化しますが、このコードではそれは考慮に入れていません。

$a(t)$, $b(t)$, $\Phi_s(t)$, $t_m(t)$ は一般に探索パラメータ (赤径· 赤緯、スピンダウンパラメータ) $(\alpha, \delta, f^{(s)})$, 検出器のパラメータ (経度、緯度、腕の向き、腕の間の角度)$(L, \lambda, \gamma, \zeta)$ とデータを特徴づけるパラメータ（観測開始時間、観測終了時間、観測開始時の地球自転位相、観測開始時の地球公転位相、データのギャップ = データ取得系や検出器のなんらかのトラブルで取得できなかったデータのこと、太陽系の SSB に対する運動）$(t_{start}, t_{end}, \phi_r, \phi_o$, gaps, ephemeris) に依存します。

F_a, F_b を使うと、F-statistic は以下のようにかけます。

$$F(f) = \frac{4}{T_0}\frac{B|F_a|^2 + A|F_b|^2 - 2C\mathcal{R}(F_a F_b^*)}{D} \tag{43}$$

4 つの振幅 A_i(実数) の最尤推定量は

$$\hat{A}_1 + i\hat{A}_3 = 4\frac{BF_a - CF_b}{T_0 D} \tag{44}$$

$$\hat{A}_2 + i\hat{A}_4 = 4\frac{AF_b - CF_a}{T_0 D} \tag{45}$$

とかけます。一方 A_i の定義から、

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}\hat{A}_i^2 = h_0^2\left(1+\frac{1}{6}\cos^2\iota+\cos^4\iota\right) \tag{46}$$

とかけるので、$\cos\iota = 1$ を仮定すると h_0 の推定値を得ます。

2.3.4 演習問題 4

問題:「簡単のため検出器ノイズがガウシアン分布にしたがうとします。検出した重力波信号の false alarm probability を計算してください。」

検出器ノイズがガウシアン分布にしたがうと仮定すると、$2F$ は自由度4 の χ^2 分布にしたがいます。観測された F-statistic の値がたとえば $2F_0 = 180$ だったとします。パラメータ空間の 1 点を探索してこの値を得たとするとFAP は

$$FAP = \int_{2F_0}^{\infty} d(2F)P(2F|4)(2F) = \left(1+F_0+\frac{1}{2}F_0^2+\frac{1}{6}F_0^3\right)\exp(-F_0) \tag{47}$$

ここで $P(\chi^2|\nu)$ は自由度 ν の χ^2 分布です。計算すると $\log_{10} FAP = -34$ で、これは実質的にゼロです。

いま、パラメータ空間のある領域を N 回、統計的に独立に探索をおこなったとすると、トータルな FAP^T は上の FAP の N 倍になります。

$$FAP^T = 1-(1-FAP)^N \simeq N\times FAP \tag{48}$$

N を 10^4 程度としても[1]、FAP を無視できます。

実際の観測では、たとえば、$2F > 25$ 程度をパルサー候補とします。このときの FAP を求めてください。

2.3.5 演習問題 5

問題:「重力波振幅の 90% Confidence interval を求めてください。ただし簡単のためノイズはガウス分布とし、信号対雑音比の 2 乗 ρ^2 は

$$\rho^2 = \frac{4h_0^2T_0}{25S_h}$$

とかけるとします。」

[1]実際のところ、パラメータ空間で独立な探索試行回数を評価するのは難しいことです。ここでは、観測周波数幅 0.0261 Hz を Doppler 周波数幅 $22\times10^{-4} = 2.2\times10^{-3}$Hz で割り、天域を 0.1radian 幅で探索していることから、$4\pi/0.1^2$ をかけて $N = 10^4$ としています。より正確には [2] の方法を使いますが、恣意性は残ります。

ノイズがガウス分布にしたがう場合、$2F$ は自由度 4, 非中心パラメータ ρ^2 の非中心 χ^2 分布 (non-central chi-square distribution) にしたがいます。このとき、

$$\int_{-\infty}^{2F_0} P(\chi'^2|\nu, \rho_u^2) d\chi'^2 = 0.05, \tag{49}$$

$$\int_{2F_0}^{\infty} P(\chi'^2|\nu, \rho_l^2) d\chi'^2 = 0.05, \tag{50}$$

$$\tag{51}$$

とすると、$[\rho_l^2, \rho_u^2]$ が ρ^2 の 90 % Confidence interval になります。ここで $P(\chi^2|\nu, \lambda)$ は自由度 ν, 非中心パラメータ λ の非中心 χ^2 分布です。たとえば、$2F_0 = 180$ のとき、Matlab の ncx2inv 関数を使うと、$[141, 230]$ となります。よって、

$$30\sqrt{\frac{S_h}{T_0}} = 1.2 \times 10^{-24} \leq h_0^{90} \leq 38\sqrt{\frac{S_h}{T_0}} = 1.6 \times 10^{-24} \tag{52}$$

が対応する h_0 の 90 % confidence interval になります。(実際使用した信号は $h_0 = 1.4 \times 10^{-24}$ です。)

今回の実習では、非中心 χ^2 分布は octave では build-in 関数ではないので、近似を使います。Abramowitz & Stegun [4] にしたがい、

$$P(\chi'^2|\nu, \rho^2) \simeq P(x), \tag{53}$$

$$x = \left[\frac{2\chi'^2}{1+b}\right]^{1/2} - \left[\frac{2a}{1+b} - 1\right]^{1/2}, \tag{54}$$

$$a = \nu + \rho^2, \tag{55}$$

$$b = \frac{\rho^2}{\nu + \rho^2} \tag{56}$$

として求めてください。ただし、$P(x)$ は平均0 、分散1 の正規分布です。つまり、χ'^2 から計算される変数 x を使うと、x は近似的に正規分布にしたがうということを使います。

なお、

$$\rho^2 = (h|h) \tag{57}$$

であり、ρ^2 の $\alpha, \delta, \psi, \iota$ についての平均を取ると

$$< \rho^2 >_{\alpha,\delta,\psi,\iota} = \frac{4}{25} \frac{h_0^2 T_0}{S_h(2f_0)} \tag{58}$$

です [2]。ここで試行 1 回に対する 1 % false alarm probability を仮定すると、2F に対するするしきい値が求まります。

$$0.01 = \int_{2F_{\rm th}}^{\infty} d(2F) P(2F|4) \tag{59}$$

このしきい値に対して 10 %の false dismissal probability を仮定すると ρ^2 に対する上限値が求まります。

$$0.1 = \int_0^{2F_{\rm th}} d(2F) P(2F|4, \rho_u^2) \tag{60}$$

これを解くと $\rho_u^2 = 20.7936$ となり、h_0 に焼き直すと

$$h_0 = 11.4 \sqrt{\frac{S_h[1/Hz]}{T_0[second]}} \tag{61}$$

が、single template search をおこなった際の重力波振幅に対する 10 % false dismissal probability, 1 % false alarm probability の上限値になります。演習問題1 においてプロットした曲線はこの式で $T_0 = 1$ 年を仮定し、S_h を KAGRA, AdvLIGO の検出器感度を使ってプロットしています。

参考文献

[1] A. L. Watts, B. Krishnan, L. Bildsten, and B. F. Schutz. Detecting gravitational wave emission from the known accreting neutron stars. *Monthly Notices of the Royal Society of London*, 389:839–868, September 2008.

[2] P. Jaranowski, A. Królak, and B. F. Schutz. Data analysis of gravitational-wave signals from spinning neutron stars: The signal and its detection. *Physical Review D*, 58(6):063001, September 1998.

[3] P. Patel, X. Siemens, R. Dupuis, and J. Betzwieser. Implementation of barycentric resampling for continuous wave searches in gravitational wave data. *Physical Review D*, 81(8):084032, April 2010.

[4] Milton Abramowitz and Irene A. Stegun, editors. *Handbook of Mathematical Functions with Formulus, Graphs, and Mathematical Tables.* Dover Publications, Inc. New York, 1972.